MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Djeljivost

3.10.2015.

Zadaci vezani uz djeljivosti često se pojavljuju na osnovnoškolskim i srednjoškolskim matematičkim natjecanjima. Ovo predavanje namijenjeno je učenicima viših razreda osnovne i učenicima srednje škole. Za razumijevanje materijala nije potrebno predznanje,osim pravila o djeljivosti koje se uče u osnovnoj školi.

Osnovna pravila djeljivosti s 2,3,5 i 9

Definicija 1.
Za cijele brojeve a i b kažemo da a dijeli b ako postoji cijeli broj c takav da je $a = b \cdot c$.

Teorem 1. *Broj je djeljiv s* 2 *ako mu je znamenka jedinica djeljiva s* 2*.*

Teorem 2. *Broj je djeljiv s* 5 *ako mu je znamenka jedinica djeljiva s* 5*.*

Teorem 3. *Broj je djeljiv s* 3 *ako mu je zbroj znamenaka djeljiva s* 3*.*

Dokaz. Neka je zadan n-teroznamenkasti broj $\overline{a_1a_2...a_n}$. Tada taj broj možemo zapisati u obliku $a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1+...a_n}$.Promotrimo broj 10^k,gdje je k prirodni broj. $10^k - 1$ je broj kojemu su sve znamenke jednake 9 ,tj. djeljiv je s 3 pa je ostatak pri dijeljenju broja $a_k \cdot 10^k$ jednak a_k. To znači da je ostatak pri dijeljenju broja $\overline{a_1a_2...a_n}$ s 3 jednak $a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Teorem 4. *Broj je djeljiv s* 9 *ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s* 9*.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu prethodnog teorema. Probajte to dokazati za vježbu.

Primjer 1.
Broj 25682 je djeljiv s 2, pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2,pri dijeljenju s 3 ostatak 2 jer je $2+5+6+8+2 = 23$, a $23 = 7 \cdot 3 + 2$.

Primjer 2.
Odredite sve peteroznamenkaste brojeve oblika $\overline{a3b2c}$ djeljive s 45.

$45 = 9 \cdot 5$ pa je traženi broj djeljiv s 5 i s 9. Zbog djeljivosti s 5 c može biti 0 ili 5.
1. $c = 0$: Sada je traženi broj oblika $\overline{a3b20}$. Zbroj znamenaka mu je $a + 3 + b + 2 + 0 = a + b + 5$. Da bi broj bio djeljiv i s 9,$a + b + 5$ mora biti djeljivo s 9,tj. $a + b$ može biti 4 ili 13.

a) $a + b = 4$: tada za a i b imamo sljedeće mogućnosti: (1,3),(2,2),(3,1) i (4,0) pa dobivamo sljedeće brojeve: 13320,23220,33120,43020.
b) $a + b = 13$: tada za a i b imamo sljedeće mogućnosti: (4,9),(5,8),(6,7),(7,6),(8,5) i (9,4) pa dobivamo sljedeće brojeve: 43290,53820,63720,73620,83520 i 93420.
2. $c = 5$: Sada je traženi broj oblika $\overline{a3b25}$. Zbroj znamenaka mu je $a + 3 + b + 2 + 5 = a + b + 10$. Da bi broj bio djeljiv i s 9,$a + b + 10$ mora biti djeljivo s 9,tj. $a + b$ može biti 8 ili 17.
a) $a + b = 8$: tada za a i b imamo sljedeće mogućnosti: (1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1),(8,0) pa dobivamo sljedeće brojeve: 13725,23625,33525,43425,53325,63225,73125,83025.
b) $a+b = 17$: tada za a i b imamo sljedeće mogućnosti: (8,9),(9,8) pa dobivamo sljedeće brojeve: 83925 i 93825.

Primjer 3.
Odredite sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{abab}$ djeljive sa 16.

$16 = 2^4$ pa ne možemo primijeniti pravila o djeljivosti. Traženi broj zapisujemo u obliku $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + a \cdot 10 + b = 1010 \cdot a + 101 \cdot b = 101 \cdot (10a + b)$. Broj 101 je neparan,tj. 16 i 101 nemaju zajedničkih djelitelja pa je $10a + b$ djeljivo sa 16. Za a i b dobivamo sljedeće mogućnosti: (1,6),(3,2),(4,8),(6,4),(8,0),(9,6). Traženi brojevi su: 1616,3232,4848,6464,8080,9696.

Primjer 4.
Odredite sve dvoznamenkaste brojeve koji su za 10 veći od trostrukog broja svojih znamenki.

Traženi broj je $\overline{ab} = 10a + b$. Zbog uvjeta zadatka vrijedi $10a + b = 3(a + b) + 10$,tj. $7a = 2b + 10$. $2b + 10$ je parni broj koji je manji ili jednak 28 pa a mora biti paran broj manji ili jednak 4,tj. a može biti 2 ili 4.
1. $a = 2$: $14 = 2b + 10$, tj. $b = 2$. Rješenje je 22.
2. $a = 4$: $28 = 2b + 10$, tj. $b = 9$. Rješenje je 49.
Dobili smo 2 rješenja: 22 i 49.

Zadaci

Zadatak 1.
Odredite najveći i najmanji broj oblika $\overline{3219abc}$ koji je djeljiv s 90.

Zadatak 2.
Odredite prirodni broj n takav da je n^5 šesteroznamenkasti broj s posljednjom znamenkom 4.

Zadatak 3.
Od znamenaka troznamenkastog broja moguće je sastaviti 6 različitih dvoznamenkastih brojeva. Koji troznamenkasti broj ima svojstvo da je jednak polovici zbroja svih 6 tako dobivenih brojeva?

Zadatak 4.
Odredi sve peteroznamenkaste brojeve $\overline{47a9b}$ koji su djeljivi brojem 18.

Zadatak 5.
Odredite a i b u broju $\overline{64a4b}$ tako da taj broj pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1,pri dijeljenju s 5 ostatak 2 ,a pri dijeljenju sa 4 ostatak 3.

Zadatak 6.
Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve koji su 12 puta veći od zbroja svojih znamenki.

Zadatak 7.
Odredite sve troznamenkaste brojeve djeljive sa 7 kojima je zbroj znamenki jednak 8.

Zadatak 8.
Odredite najveći i najmanji broj oblika $\overline{993abc}$ koji je djeljiv i sa 6 i sa 7.

Zadatak 9.
Odredite sve četveroznamenkaste brojeve djeljive s 18 kojima je na mjestu desetica 4 i kojem su sve znamenke međusobno različite.

Zadatak 10.
Odredite sve dvoznamenkaste brojeve koji su za 1 manji od šesterostrukog zbroja svojih znamenki.

Zadatak 11.
Zbroj dvoznamenkastog i troznamenkastog broja je četveroznamenkasti broj. Svaki od ta tri broja jednako se čita s lijeva na desno i obratno. Koji su to brojevi?

Zadatak 12.
Dokažite da je zbroj $1^{1998} + 2^{1998} + 3^{1998} + 4^{1998}$ djeljiv s 10.

Rješenja

Neki zadaci su riješeni detaljno, a kod ostalih se koriste slične ideje.

Rješenje zadatka 1. $90 = 10 \cdot 9$ pa je traženi broj djeljiv i s 10 i s 9. Zbog djeljivosti s 10 slijedi $c = 0$. Sada je traženi broj oblika $\overline{3219ab0}$. Zbroj znamenki je $3 + 2 + 1 + 9 + a + b + 0 = 15 + a + b$ pa $a + b$ može biti 3 ili 12. Za najmanji traženi broj,tražimo što manju moguću znamenku stotica a to je u slučaju kada je $a = 0$ i $b = 3$, a za najveći traženi broj,a mora biti što veći,a najveći je za $a = 9$ i $b = 3$, tj. najmanji takav broj je 3219030,a najveći 3219930.

Rješenje zadatka 2. Ako broj ima zadnju znamenku 4,onda je ostatak pri dijeljenju tog broja s 10 također 4.Gledamo sve moguće ostatke pri dijeljenju broja n^5 s 10. Ostatak ovisi samo o vrijednosti posljednje znamenke pa gledamo ostatak pri dijeljenju brojeva 1^5,2^5,...,9^5 s 10.Jedino za 4 4^5 daje ostatak 4 pri dijeljenju s 10. Kako je n^5 šesteroznamenkasti ,n mora biti dvoznamenkasti broj.

Rješenje zadatka 3. Iz uvjeta zadatka vrijedi $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{cb}$.Nakon što raspišemo obje strane jednakosti kao u prethodnim zadacima,dobijemo jednakost $89a = 10c + b$. $10c + b$ je dvoznamenkasti broj pa je $a = 1$,tj. $89 = 10c + b$ pa je $b = 9$ i $c = 8$. Traženo rješenje je 198.

Rješenje zadatka 4. $18 = 9 \cdot 2$ pa je b paran broj i zbroj znamenaka mu je djeljiv s 9.
$b = 0$: Zbroj znamenaka je 20 pa je $a = 7$.
$b = 2$: Zbroj znamenaka je 22 pa je $a = 5$.
$b = 4$: Zbroj znamenaka je 24 pa je $a = 3$.
$b = 6$: Zbroj znamenaka je 26 pa je $a = 1$.
$b = 8$: Zbroj znamenaka je 28 pa je $a = 8$.
Traženi brojevi su: 47196,47394,47592,47790,47898.

Rješenje zadatka 5. Broj daje ostatak 2 pri dijeljenju s 5 ako mu je posljednja znamenka 2 ili 7. Za $b = 2$ broj $\overline{64a42}$ ne daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4,a za $b = 7$ je to točno. Sada je traženi broj oblika $\overline{64a47}$. Broj daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 ako mu suma znamenaka daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3. Suma znamenaka je $6 + 4 + a + 4 + 7 = 21 + a$,tj. a je 1,4 ili 7. Uvrštavajući sve mogućnosti za a dobivamo rješenja:64147,64447 i 64747.

Rješenje zadatka 6. 108.

Rješenje zadatka 7. 602,413,224,161,350.

Rješenje zadatka 8. Najmanji broj je 993006,a najveći 993971.

Rješenje zadatka 9. Rješenja su: 2340,3240,9540,8640,6840,5940,3042,9342,7542,5742,3942,1746,3546,5346, 7146,8046,9846, 8946.

Rješenje zadatka 10. 11 i 65.

Rješenje zadatka 11. Traženi brojevi su 22,959 i 1001.

Rješenje zadatka 12. 1^1998 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 10. Raspišemo potencije broja 2 i promatramo zadnju znamenku i dobivamo redom: 2,4,8,6,2,4... pa broj 2^1998 daje jednak ostatak pri dijeljenju s 10 kao i $2^2 = 4$ jer 1998 daje ostatak 2 pri dijeljenju s 4. Slično, promatramo ostatak pri dijeljenju s 10 potencija broja 3 i 4. Zadnja znamenka broja 3^1998 9, a zadnja znamenka broja 4^1998 je 6. Ukupno, ostatak pri dijeljenju s 10 je $1 + 4 + 9 + 6 = 20 = 2 \cdot 10$ pa je suma djeljiva s 10.