MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Vjerojatnost

10.10.2015.

Igre s novčićem

U sklopu ovog predavanja kreirat ćemo različite igre za svaku od kojih su pravila jednaka. Jedini dozvoljeni predmet u igri jest jedan simetrični novčić, koji uvijek pada ili na glavu ili na pismo. U igri sudjeluje n igrača, ali uvijek postoji jedan i samo jedan pobjednik. Potrebno je osmisliti igru, takvu da k-ti igrač ima vjerojatnost pobjede p_k. U nekim od igara će broj igrača biti kontretan broj, najčešće 2, ali u nekima ćemo raditi i s proizvoljnim brojem igrača. Pojam igre se u ovom kontekstu malo zloupotrebljava, jer pod igru obično podrazumijevamo da igrači imaju mogućnost utjecanja na ishod igre, dok se "Igra s novčićem" treba shvatiti više kao "igranje" lutrije.

Primjer 1.
Odredite igru s novčićem za $n = 2$ igrača u kojoj za oba igrača vjerojatnost pobjede iznosi $\frac{1}{2}$, odnosno vrijedi $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

Označimo igraće s A i B, potrebno je osmisliti igru u kojoj oba imaju vjerojatnost pobjede $\frac{1}{2}$. U matematici se vjerojatnosti najčešće zapisuju u obliku decimalnog broja, ili razlomka iz intervala $[0, 1]$, ali ako vam je tako lakše možete o njima razmišljati i u obliku postotka, odnosno u ovom primjeru 50%. Najjednostavnije rješenje je da jednom bacimo novčić i ako padne glava (označimo taj događaj s G) pobjeđuje igrač A, a ako padne pismo (P) pobjeđuje igrač B. No ovo nije jedina moguća igra, možemo igrati i tako da dva puta bacimo novčić i kažemo da igrač A pobjeđuje ako padne G, G ili P, P, a igrač B ako padne P, G ili G, P. Vjerojatnost da padne G, G jest $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ i analogno za P, P pa zato vjerojatnost da padne G, G ili P, P iznosi $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Analogno se pokaže i za igrača B.

Primjer 2.
Postoji li igra s novčićem za $n = 3$ igrača u kojoj prvi igrač ima vjerojatnost pobjede $\frac{1}{2}$, a druga dva $\frac{1}{3}$, odnosno vrijedi $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$?

Po pravilima igre mora postojati jedan i samo jedan pobjednik. Zbog toga se vjerojatnosti da svaki pojedini igrač pobjedi moraju sumirati u 1, odnosno 100%. Ukoliko bi im suma bila manja od 1 to bi značilo da postoji mogućnost da nitko ne pobjedi, a ako je veća od 1 da je u nekom od ishoda pobjedilo više od jednog igrača. Budući da je $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{6} > 1$ ne postoji takva igra s novčićem.

Primjer 3.
Odredite nužne uvjete na $p_1, p_2, \ldots, p_n$ kako bi postojala igra s novčićem za n igrača. Jesu li to i dovoljni uvjeti?

U prošlom primjeru uočili smo da kako bi postojala igra s novčićem mora vrijediti $p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1$. U matematici se često koriste pojmovi nužnih i dovoljnih uvjeta. Iako se te riječi koriste i u kontekstu izvan matematike oni svejedno mogu stvarati poteškoće. Dakle na primjer nužan uvjet da netko završi srednju školu jest da ima pozitivnu ocjenu iz matematike, a dovoljan da ima peticu iz svih predmeta. Ukoliko netko nema pozitivnu ocjenu iz matematike možemo zaključiti da ne može završiti srednju školu, ali ako ima pozitivnu ocjenu iz matematike ne možemo ništa zaključiti jer je moguće da ima negativnu ocjenu iz povijesti. Ukoliko netko ima peticu iz svih predmeta možemo zaključiti da može završiti srednju školu, ali ako nema peticu iz svih predmeta ne možemo ništa zaključiti jer je moguće da ima iz povijesti četiri i svejedno može završiti srednju školu. U ovom primjeru zato su nužni uvjeti da postojala igra s novčićem da vrijedi

$$p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1, \tag{1}$$

ali još ne znamo jesu li to i dovoljni uvjeti, odnosno postoji li igra s novčićem za svaki raspored vjerojatnosti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ koji zadovoljava (1). Na to pitanje odgovorit ćemo u nastavku predavanja.

Bacanje novčića konačno mnogo puta

U nastavku slijede zadaci u kojima se od vas traži da osmislite igru sa zadanim vjerojatnostima pobjede svakog od igrača. Rješenja su priložena na kraju dokumenta, pa ako vam neki od zadataka stvara problem, možete pogledati njegovo rješenje. Svakako preporučamo da zadatke rješavate po redu i ako za neki pogledate rješenje slijedeći ponovno pokušate riješiti samostalno.

Zadatak 1.
Odredite igru s novčićem za $n = 2$ igrača u kojoj prvi igrač ima vjerojatnost pobjede $\frac{1}{4}$, a drugi $\frac{3}{4}$, odnosno vrijedi $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{3}{4}$.

Zadatak 2.
Odredite igru s novčićem za $n = 3$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{8}, p_3 = \frac{5}{8}$.

Zadatak 3.
Odredite igru s novčićem za $n = 3$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{5}{16}, p_3 = \frac{7}{16}$.

Zadatak 4.
Odredite igru s novčićem za $n = 4$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = p_4 = \frac{1}{8}$.

Zadatak 5.
Odredite igru s novčićem za $n = 4$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{16}, p_4 = \frac{3}{16}$.

Zadatak 6.
Odredite igru s novčićem za $n = 2$ igrača u kojoj drugi igrač ima pozitivnu vjerojatnost da pobjedi, ali ona je manja od 0.0000001. Koliko takvih igara s novčićem postoji?

U zadatku 6 zanimalo nas je postoji li igra u kojoj jedan od igrača ima vrlo malu vjerojatnost pobjede. Umjesto broja 0.0000001 mogli smo promatrati bilo koji mali broj koji je veći od 0.

Bacanje novčića beskonačno mnogo puta

Odredimo sada vjerojatnost da novčić padne na glavu k puta i tabelirajmo dobivene vjerojatnosti. Za $k = 1$ ta vjerojatnost iznosi $\frac{1}{2}$, za $k = 2$ dobivamo vjerojatnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ što pomoću potencija možemo zapisati $\frac{1}{2^2}$.

k	vjerojatnost da padne k glava	u obliku potencije
1	0.5	$\frac{1}{2^1}$
2	0.25	$\frac{1}{2^2}$
3	0.125	$\frac{1}{2^3}$
4	0.0625	$\frac{1}{2^4}$
5	0.03125	$\frac{1}{2^5}$
6	0.015625	$\frac{1}{2^6}$
7	0.0078125	$\frac{1}{2^7}$

Tablica 1: Vjerojatnosti uzastopnog padanja novčića na glavu više puta

Uočimo da ove vjerojatnosti opadaju u 0, ali budući da je vjerojatnost svakog događaja veća ili jednaka 0 zaključujemo da je vjerojatnost da novčić padne na glavu beskonačno mnogo puta zapravo 0. Ovo se nekima može činiti čudno, jer bi rekli da se može dogoditi da novčić stalno pada na glavu, ali to se događa s vjerojatnošću 0. Ovu činjenicu koristit ćemo u rješavanju slijedećeg zadatka.

Zadatak 7.
Odredite igru s novčićem za $n = 3$ igrača u kojoj je $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Postoji li takva igra u novčić?

Na prvi pogled čini se da ovakva igra ne postoji, jer su sve strategije u dosadašnjim zadacima koristile činjenicu da su nazivnici traženih vjerojatnosti bili potencije broja dva, dok 3 to nije. To je točno, ali ne znači da ne postoji neka druga strategija kojom se može postaviti i ovakva igra. Probajte malo dulje razmisliti o ovom zadatku, ali ako se uspijete osmisliti strategiju, detaljno rješenje nalazi se na kraju dokumenta. Slijedeći zadaci rješavaju se na sličan način, pa ako uspijete riješiti Zadatak 7 oni vam ne bi trebali stvarati veće probleme.

Zadatak 8.
Odredite igru s novčićem za $n = 5$ igrača u kojoj je $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{5}$.

Zadatak 9.
Odredite igru s novčićem za $n = 2$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{5}{6}, p_2 = \frac{1}{6}$.

Zadatak 10.
Odredite igru s novčićem za $n = 2$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{5}{7}, p_2 = \frac{2}{7}$.

Zadatak 11.
Odredite igru s novčićem za $n = 3$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{9}, p_3 = \frac{5}{9}$.

U svim dosadašnjim zadacima osmišljavali smo igre u kojima su sve vjerojatnosti bile fiksni i poznati brojevi. Pokušajmo sada u slijedećem zadatku te rezultate okupiti u jedan općeniti rezultat u kojem je vjerojatnost općeniti racionalni broj.

Zadatak 12.
Odredite igru s novčićem za $n = 2$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{a}{b}, p_2 = \frac{b-a}{b}$, gdje su a i b prirodni brojevi takvi da vrijedi $a < b$.

U rješenju ovog zadatka biti će potrebno posebno proučiti slučaj kada je nazivnik, odnosno b potencija broja 2 i kada nije. Pokušajte u oba slučaja opisati postupak igre koji će odgovarati postupku u prijašnjim zadacima, samo ćemo umjesto konkretnih brojeva gledati općenite a i b.

Slijedeći zadatak je ponovno teži od prethodnih u smislu da ponovno zahtjeva novu strategiju za igru. Razlika je u tome što smo do sada uvijek imali vjerojatnosti pobjede koje su bile iz skupa racionalnih brojeva, a u Zadatku 13 su vjerojatnosti iracionalne.

Zadatak 13.
Odredite igru s novčićem za $n = 2$ igrača u kojoj je $p_1 = \frac{\pi}{10}, p_2 = \frac{10-\pi}{10}$.

Ako vam je ovaj zadatak pretežak ne morate brinuti, on zaista izlazi iz okvira ovog predavanja, ali ako vam se čini zanimljivim možete pokušati o njemu razmisliti. Rješenje je napisano na kraju dokumenta, ali svakako preporučam da prvo o njemu dulje razmislite, jer teško da će te ga se odmah sjetiti.

Ukoliko ste uspjeli riješiti Zadatak 13 možete se okušati i u sljedećem zadatku čije je rješenje također dano na kraju dokumenta.

Zadatak 14.
Ovaj puta djelomično ćemo izmijeniti pravila igre. Neka vam je sada dan jedan novčić, ali u ovom slučaju ne znate je li on simetričan. Recimo da on pada na glavu s vjerojatnošću q, a na pismo s vjerojatnošću $1 - q$, ali vi ne znate koliko taj q iznosi. Pokušajte s takvim novčićem odredite igru za $n = 2$ igrača u kojoj je vjerojatnost pobjede prvog igrača p, a drugog $1 - p$, za proizvoljni realni broj p iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$.

Ovime smo završili ovu temu i ujedno odgovorili na pitanje o dovoljnosti uvjeta iz Primjera 3, barem u slučaju $n = 2$. Možete razmisliti vrijedi li isto i za proizvoljni n.

Rješenja zadataka

Rješenje zadatka 1. U ovom zadatku nemoguće je osmisliti takvu igru sa samo jednim bacanjem novčića. Biti će nam potrebna dva bacanja, pa zato popišimo sve moguće ishode i njihove vjerojatnosti gdje s G označavamo da je pala glava, s P da je palo pismo, a s p odgovarajuće vjerojatnosti

$$\begin{aligned}
G,G \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\\
G,P \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\\
P,G \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\\
P,P \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Recimo da igrač A pobjeđuje ukoliko je palo G,G, a igrač B inače, odnosno ako je palo G,P ili P,G ili P,P. Vjerojatnost da pobjedi igrač A jest $\frac{1}{4}$, a da pobjedi igrač B jest $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Ovime je osmišljena igra koja zadovoljava uvijete zadatka.

Rješenje zadatka 2. U ovom zadatku prvo je potrebno zadane vjerojatnosti svesti na zajednički nazivnik, zato je $p_1=\frac{2}{8}, p_2=\frac{1}{8}, p_3=\frac{5}{8}$. Budući da su u pitanju osmine igra koju zadajemo sastojat će se od 3 bacanja novčića, uz oznake kao i ranije imamo

$$\begin{aligned}
G,G,G \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}, &\quad G,G,P \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\\
G,P,G \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}, &\quad G,P,P \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\\
P,G,G \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}, &\quad P,G,P \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\\
P,P,G \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}, &\quad P,P,P \quad p &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Uočimo da su vjerojatnosti svakog događaja s istim brojem bacanja jednake kao što zapravo i očekujemo, zato u nastavku nećemo više naglašavati koja je vjerojatnost pojedinog bacanja, već podrazumjevamo da ona uvijek iznosi $\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{broj bacanja}}$.

Recimo sada da igrač A pobjeđuje ako padne G,G,G ili G,G,P, igrač B ako padne G,P,G i igrač C inače. Tada za vjerojatnost da pobjedi igrač A dobivamo $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$, da pobjedi igrač B $\frac{1}{8}$ i da pobjedi igrač C $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

Rješenje zadatka 3. U ovom zadatku ponovno ćemo svesti tražene vjerojatnosti na zajednički nazivnik, u ovom slučaju to je 16. Dobivamo $p_1=\frac{4}{16}, p_2=\frac{5}{16}, p_3=\frac{7}{16}$. Ponovno je potrebno popisati sve slučajeve, sada za četiri bacanja novčića. U većini zadataka kombinatornog tipa u nižim razredima srednje škole, a pogotovo u osnovnoj školi najvažnije je pregledno popisati sve slučajeve. Kako bi bili sigurni da niti jedan niste napisali više puta i niti jedan preskočili morate ih popisivati sistematično. Jedna takva mogućnost u ovom zadatku je zamisliti da pišemo po redu brojeve u bazi 2, gdje G predstavlja 0, a P 1. Druga praktična mogućnost je da prvo ispišemo sva bacanja u kojima nije pala ni jedna glava, zatim ona na kojima je pala samo jedna glava i tako dalje. Sada navodimo popis poredan po prvom načinu

$$\begin{array}{llll}
G,G,G,G & G,G,G,P, & G,G,P,G, & G,G,P,P,\\
G,P,G,G & G,P,G,P, & G,P,P,G, & G,P,P,P,\\
P,G,G,G & P,G,G,P, & P,G,P,G, & P,G,P,P,\\
P,P,G,G & P,P,G,P, & P,P,P,G, & P,P,P,P.
\end{array}$$

Recimo sada da igrač A pobjeđuje ako padne G,G,G,G ili G,G,G,P ili G,G,P,G ili G,G,P,P, igrač B ako padne G,P,G,G ili G,P,G,P ili G,P,P,G ili G,P,P,P ili P,G,G,G i igrač C inače. Tada za vjerojatnost da pobjedi igrač A dobivamo $4\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{16}$, da pobjedi igrač B $5\cdot\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$ i da pobjedi igrač C $7\cdot\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$.

Rješenje zadatka 4. Ovaj zadatak ponovno se može kao i prethodna dva riješiti svođenjem na zajednički nazivnik i popisivanjem slučajeva, ali ovdje nudimo malo drugačije riješenje. Budući da je $p_1=\frac{1}{2}$, recimo da igrač A pobjeđuje ako na prvom bacanju padne pismo i u tom slučaju je igra gotova. Ako pak u prvom bacanju padne glava znamo da nije pobijedio igrač A, ali u igri ostaju igrači B, C i D, pa zato novčić bacamo još jednom. Ukoliko na drugom bacanju padne pismo pobjeđuje igrač B, ukoliko i na drugom bacanju padne glava, nisu pobijedili ni A ni B, a da bi odabrali pobjednika bacamo novčić po treći put. Ukoliko na trećem novčiću padne pismo pobjeđuje igrač C, a ako padne glava pobjeđuje igrač D. Ovakav raspored zaista daje tražene vjerojatnosti pobjede za svakog od igrača.

Rješenje zadatka 5. Ovaj zadatak možemo riješiti slično kao i prethodni. Ponovno ako prvi novčić padne na pismo pobjeđuje igrač A, u suprotnom bacamo opet. Ako drugi novčić padne na pismo pobjeđuje B, u suprotnom bacamo još dva puta. Ako su oba pala na pismo pobjeđuje C, a u svim ostalim slučajevima pobjeđuje D. Sami malo detaljnije raspišite ove vjerojatnosti kako bi se uvjerili da je ovo zaista rješenje zadatka.

Rješenje zadatka 6. Ovaj se zadatak razlikuje od prethodnih jer nije definirana točna vjerojatnost pobjede igrača B, već se samo traži da ona zadovoljava $0 < p < 0.0000001$. To se može postići ukoliko zahtijevamo da igrač B pobjedi samo ako dovoljno mnogo puta padne glava, a u svim ostalim slučajevima pobjeđuje igrač A. Budući da je $\left(\frac{1}{2}\right)^{24} \approx 0.0000000596$ dovoljno je zahtijevati da B pobjeđuje ako u 24 ili više bacanja novčić padne na glavu. Iz ovoga je jasno da postoji beskonačno mnogo takvih igara.

Rješenje zadatka 7. Promotrimo igru u kojoj prvo novčić bacamo 2 puta i recimo da igrač A pobjeđuje ukoliko padne P, P, igrač B ukoliko padne P, G, a igrač C u slučaju G, P. Ostaje problem što se dogodi ako padne G, G? Ako želimo zadržati iste vjerojatnosti da pobjedi svaki od igrača u tom slučaju ne smije pobijediti niti A, niti B niti C. Također ne smijemo definirati niti igru u kojoj u tom slučaju nitko ne pobjeđuje, jer je to protivno pravilima. Ali ono što možemo je reći da u tom slučaju novčić bacamo još 2 puta. Nakon tih bacanja ponovno postupamo kao i nakon prve serije bacanja. Jedini problem u ovoj strategiji je što ako uvijek novčić pada samo na glavu. Budući da je, kao što smo ranije komentirali, vjerojatnost tog događaja 0 ta nas mogućnost ne treba brinuti. Odredimo vjerojatnosti da u ovoj pobjedi pojedini igrač. Budući da je igra simetrična svi igrači imaju jednaku vjerojatnost pobjede, a budući da je vjerojatnost da neki od njih pobjedi 1 zaključujemo da je vjerojatnost pobjede svakog od njih $\frac{1}{3}$. Ukoliko vas ovaj argument nije uvjerio pokušajte pomoću kalkulatora izračunati vjerojatnost da prvi igrač pobjedi u k bacanja, za $k = 2, 4, 6, 8, \ldots$.

Rješenje zadatka 8. U ovom zadatku potrebno je novčić za početak baciti 3 puta i tada u slučaju da padne G, G, G pobjeđuje igrač A, u slučaju da padne G, G, P pobjeđuje igrač B, u slučaju da padne G, P, G pobjeđuje igrač C, u slučaju da padne G, P, P pobjeđuje igrač D, u slučaju da padne P, G, G pobjeđuje igrač E, a u ostalim slučajevima ponovno bacamo. Preostaje pokazati da je vjerojatnost da igra nikada ne završi, odnosno da moramo ponavljati bacanja beskonačno mnogo puta, jednaka 0. Vjerojatnost da jednom moramo ponoviti bacanje je $\frac{3}{8}$ (uvjerite se u to), vjerojatnost da dvaput moramo ponoviti bacanje je $\left(\frac{3}{8}\right)^2$, vjerojatnost da triput moramo ponoviti bacanje je $\left(\frac{3}{8}\right)^3$, vjerojatnost da k puta moramo ponoviti bacanje je $\left(\frac{3}{8}\right)^k$. Budući da je $0 < \left(\frac{3}{8}\right) < 1$ ta vjerojatnost teži u 0 kako k teži u beskonačnost, pa je vjerojatnost da beskonačno mnogo puta moramo ponoviti bacanje 0.

Rješenje zadatka 9. Ponovno novčić bacamo 3 puta i u slučaju da padne G, G, G ili G, G, P ili G, P, G ili G, P, P ili P, G, G pobjeđuje igrač A, u slučaju da padne P, G, P pobjeđuje igrač B, a inače ponavljamo bacanja. Analogno kao u prethodnom zadatku pokaže se da je vjerojatnost da igra nikada ne završi jednaka 0.

Rješenje zadatka 10. Ponovno novčić bacamo 3 puta i u slučaju da padne G, G, G ili G, G, P ili G, P, G ili G, P, P ili P, G, G pobjeđuje igrač A, u slučaju da padne P, G, P ili P, P, G pobjeđuje igrač B, a inače ponavljamo bacanja. Analogno kao u rješenju Zadatka 8 pokaže se da je vjerojatnost da igra nikada ne završi jednaka 0.

Rješenje zadatka 11. Novčić bacamo 4 puta i u slučaju da padne G, G, G, G ili G, G, G, P ili G, G, P, G pobjeđuje igrač A, u slučaju da padne G, G, P, P pobjeđuje igrač B, u slučaju da padne G, P, G, G ili G, P, G, P ili G, P, P, G ili G, P, P, P ili P, G, G, G pobjeđuje igrač C, a inače ponavljamo bacanja. Analogno kao u rješenju Zadatka 8 pokaže se da je vjerojatnost da igra nikada ne završi jednaka 0.

Rješenje zadatka 12. U slučaju da je $b = 2^k$ za neki prirodan broj k tada bacimo novčić k puta, te u prvih a ishoda pobjeđuje igrač A, a u ostalih $2^k - a = b - a$ ishoda pobjeđuje igrač B.

U slučaju da ne postoji prirodan broj k takav da je $b = 2^k$, onda postoji prirodan broj n takav da je $2^{n-1} < b < 2^n$. U tom slučaju bacamo novčić n puta te u prvih a ishoda pobjeđuje igrač A, u slijedećih $b - a$ ishoda pobjeđuje igrač B, a u preostalih $2^n - b$ ishoda ponavljamo bacanje. Analogno kao u rješenju Zadatka 8 pokaže se da je vjerojatnost da igra nikada ne završi jednaka 0.

Uvjerite se da je ovaj postupak uistinu proveden u svim prijašnjim zadacima uz konkretne prirodne brojeve a i b.

Rješenje zadatka 13. Zapravo, kako je sugerirano u Zadatku 14, može se simulirati bilo koja vjerojatnost, odnosno, konkretan broj $\frac{\pi}{10}$ ne igra nikakvu ulogu.

Stoga neka je zadana proizvoljna vjerojatnost $p \in \langle 0, 1\rangle$, te želimo simulirati događaj vjerojatnosti p. Zamislite p kao istaknutu točku na segmentu $[0, 1]$. Sad ćemo opisati kako simulirati traženi događaj a zatim ćemo pokušati objasniti zašto je opisana simulacija dobra. Bacimo novčić, ukoliko padne pismo "odemo" u lijevu stranu intervala, tj. "odemo" u $[0, 0.5]$, a ukoliko padne glava "odemo" u desnu stranu, tj. u interval $[0.5, 1]$. Ukoliko smo otišli u lijevi interval, a točka p je u desnom, proglasimo prvog igrača za pobjednika. Ukoliko smo otišli u desni interval, a točka p je u lijevom, proglasimo drugog igrača za pobjednika. Ukoliko je točka p ostala u intervalu u kojem se nalazimo, ponavljamo ovaj postupak.

Sad ćemo na 2 primjera opisati zašto je ova simulacija dobra.

Recimo da je $p = 0.5$. Ako nam padne pismo, ostat ćemo u intervalu $[0, 0.5]$. Ako nam sad pak opet padne pismo, ostat ćemo u intervalu $[0, 0.25]$, te ćemo točku p "ostaviti" desno od našeg intervala, dakle proglasit ćemo prvog igrača za pobjednika. Ako nam je na drugom potezu pala glava, "otići" ćemo u interval $[0.25, 0.5]$, točka $p = 0.5$ dakle nećemo nikoga proglasiti za pobjednika te ćemo nastaviti bacati novčić. Ako nam sad padne pismo, proglasit ćemo prvog za pobjednika, ako nam padne glava, nastavit ćemo bacati i tako dalje. U nekom trenutku će nam pasti pismo budući da je vjerojatnost da nam glave padaju zauvijek 0, te ćemo u tom nekom trenutku prvog igrača proglasiti za pobjednika. Da rezimiramo, ako nam je na početku palo pismo, prije ili kasnije ćemo proglasiti prvog igrača za pobjednika. Potpuno analogno, ako nam je prvo pala glava, prije ili kasnije ćemo proglasiti drugog za pobjednika. Razmislite malo zašto je ta situacija potpuno analogna prethodnoj. Dakle, ako padne pismo, pobjedio je prvi igrač, ako padne glava, pobjedio je drugi dakle uspjeli smo simulirati traženu vjerojatnost.

Uzmimo sada da je $p = \frac{\pi}{10} \approx 0.314159$. Ako nam padne glava, automatski ćemo proglasiti drugog za pobjednika, dakle on već ima vjerojatnost od 0.5 da pobjedi. Ako nam padne pismo, "odlazimo" u interval $[0, 0.5]$, tj. imamo vjerojatnost od 0.5 da nastavimo s igrom. Ako nam sad padne pismo, proglašavamo prvog za pobjednika, dakle on zasad ima vjerojatnost $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$ da pobjedi. Ako nam padne glava, "odlazimo" u $[0.25, 0.5]$, tj. imamo vjerojatnost 0.25 da nastavimo s igrom. Ako nam sad padne glava, proglasit ćemo drugog za pobjednika, dakle on ima još $0.25 \cdot 0.5 = 0.125$, dakle sveukupno zasad $0.5 + 0.125 = 0.625$ vjerojatnost da pobjedi. Ako nam padne pismo, "odlazimo" u interval $[0.25, 0.375]$, te ovim postupkom nastavljamo igru dok god se broj $\frac{\pi}{10}$ nalazi u intervalu. Vjerojatnost da nastavljamo igru u svakom trenutku se prepolavlja, tako da će vjerojatnost da prvi igrač pobjedi biti jednaka duljini intervala $\left[0, \frac{\pi}{10}\right\rangle$, što je upravo $\frac{\pi}{10}$, a vjerojatnost da drugi pobjedi $\frac{10-\pi}{10}$.

Rješenje zadatka 14. Rješenje ovog zadatka se uvelike oslanja na prethodni zadatak. Dovoljno nam je s nekim novčićem simulirati događaj vjerojatnosti 0.5 te onda s tim događajem simulirati događaj iz zadatka proizvoljne vjerojatnosti p. To ćemo učiniti na sljedeći način: bacimo novčić 2 puta. Ako nam padne pismo pa glava, proglasimo to događajem A. Ako nam padne glava pa pismo, proglasimo to događajem B. Ako nam padne dva puta pismo ili dva puta glava, bacamo ponovo. Vjerojatnost događaja A iznosi $(1-q)q$, a događaja B iznosi $q(1-q)$. Te su dvije vjerojatnosti jednake. Vjerojatnost nastavljanja igre je $q^2 + (1-q)^2$, što je manje od 1 jer je $0 < q < 1$. Pokušajte se uvjeriti u to. Dakle, ovo bacanje će u nekom trenutku završiti, a vjerojatnost događaja A će biti jednaka vjerojatnosti događaja B u svakom trenutku. Stoga, uspjeli smo konstruirati događaje A i B jednake vjerojatnosti te njih sada možemo smatrati novim ishodima "pismo" ili "glava". Prema prethodnom zadatku, sada možemo simulirati događaj proizvoljne unaprijed zadane vjerojatnosti p.