Tetivni četverokuti

S2	Seniorska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Luka Banović

12. listopada 2019.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Cilj ovoga predavanja je nadograditi dosadašnje znanje o geometriji, točnije o kružnicama. Za početak, prisjetimo se nekih uvodnih teorema:

Teorem 1. (o obodnom i središnjem kutu) *Obodni kut nad tetivom kružnice dvostruko je veći od središnjeg kuta nad tom istom tetivom.*

Dokaz: (ideja) Posebnost ovog dokaza je da se provodi u 3 dijela: prvo dokazujemo tvrdnju kada se središte kružnice nalazi na jednom od krakova obodnog kuta. Pomoću toga puno lakše dokazujemo preostala 2 dijela: kada se središte kružnice nalazi unutar obodnog kuta, odnosno kada se nalazi izvan njega.

Koliko je prethodni teorem važan pokazuje činjenica da sljedeće 3 tvrdnje slijede direktno iz njega:

Teorem 2. *Svi obodni kutovi nad tetivama iste duljine su jednaki.*

Teorem 3. (Tales) *Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.*

Teorem 4. (o kutu između tetive i tangente) *Kut između tetive i tangente u jednoj od krajnjih točaka te tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

Sada je došao trenutak da definiramo središnji pojam ovog predavanja.

Definicija. ***Tetivni četverokut*** *je četverokut kojem se može opisati kružnica.*

Iako nisu svi četverokuti tetivni, oni koji jesu od posebnog su nam značaja. Naravno, osim što se često pojavljuju u raznim zadatcima, posjeduju nekoliko zanimljivih svojstava. Ovdje navodimo 3 najvažnija, a svaki od njih čini jedan dovoljan uvjet da prepoznamo da se radi o tetivnom četverokutu:

Teorem 5. *Četverokut je tetivan ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih kuteva jednak* $180°$.

Teorem 6. *Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako je $\angle ACB = \angle ADB$ (ili vrijedi bilo koja analogna varijanta).*

Teorem 7. (Ptolomej) *Četverokut $ABCD$ je tetivan ako i samo ako vrijedi sljedeća jednakost:*

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

Za kraj uvoda, navest ćemo nekoliko tehnika koje pomažu pri rješavanju zadataka s tetivnim četverokutima:

- odrediti veličine što više kutova koji se pojavljuju na skici (tehnika popularno zvana *angle chase*),
- kada se uoči tetivni četverokut, povući dijagonale da se dobije što više obodnih kuteva na skici (od kojih će neki biti jednaki),
- četverokut s 2 nasuprotna prava kuta je tetivan (što se često pojavljuje ukoliko u zadatku imamo zadane visine ili simetrale opisane kružnice trokuta),
- uvijek imati na umu da se tetivni četverokut može negdje pojaviti (čak ponekad nije loše i docrtati koji ;).

Lakši zadaci

1. Dokažite *teorem 4*.

2. Neka je $ABCD$ četverokut takav da je $|AB| = |BC| = |CA|$ i $\angle CDA = 120°$. Dokažite da je $|BD| = |AD| + |CD|$.

3. U trokutu ABC neka su nožišta visina iz B i C redom točke D i E. Dokažite da je tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki A paralelna s pravcem DE.

4. U tetivnom četverokutu $ABCD$, neka okomica na AB u točki B siječe pravac CD u E, i neka okomica na CD u točki D siječe pravac AB u točki F. Dokažite da je $AC \parallel EF$.

5. Neka je ABC jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{BC}$. Simetrala kuta u vrhu B siječe krak $\overline{AC}$ u točki P. Ako kružnica koja prolazi točkama B, C i P raspolavlja krak $\overline{AB}$, odredite veličine kutova trokuta ABC

6. Pravci AB, CD i EF sijeku se u istoj točki T. Ako su četverokuti $ABDC$ i $CDFE$ tetivni, dokažite da onda i četverokut $ABFE$ mora biti tetivan.

7. Točke E i F su redom polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$. Pravci BE i CF sijeku se u točki P. Dokažite da je $|AP| = |AB|$.

8. U tetivnom četverokutu $ABCD$ dijagonala $\overline{AC}$ raspolavlja kut $\angle DAB$. Neka je E točka na pravcu AD takva da je $|AE| > |DE|$ i $D \in \overline{AE}$. Dokažite sljedeću tvrdnju: $|CE| = |CA| \iff |DE| = |AB|$.

Teži zadaci

9. Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrala dužine $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki E. Kružnica koja prolazi točkom E, vrhom C i polovištem F stranice $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki G. Dokažite da je $AD \perp FG$.

10. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem u točki O. Na kružnici je dana točka C takva da je $OC \perp AB$. Na kraćem luku BC odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na AB. Dokažite da je $|BQ| = |QR|$.

11. Dan je četverokut $ABCD$. Opisana kružnica trokuta ABC siječe stranice $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ redom u točkama P i Q, a opisana kružnica trokuta CDA stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u R i S. Pravci BQ i BP sijeku pravac RS redom u točkama M i N. Dokažite da točke M, N, P i Q leže na istoj kružnici.

12. Neka je ABC jednakokračni trokut s osnovicom $\overline{BC}$, te vrijedi $\angle BAC = 36°$. Kružnica sa središtem u točki C i polumjerom $\overline{AC}$ siječe pravac AB u točki D. Kružnica koja prolazi točkama B, C i D siječe prvu kružnicu u točkama D i E. Neka je S sjecište pravaca AE i CD. Dokažite da je $|DS| = |BC|$.

13. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac l siječe kružnicu k_1 u C i E, a kružnicu k_2 u D i F tako da se točka D nalazi između C i E, a točka E između D i F. Pravci CA i BF sijeku se u točki G, a pravci DA i BE u točki H. Dokažite: $CF \parallel HG$.

Hintovi

1. Poučak o obodnom i središnjem kutu.
2. Pokažite da je $ABCD$ tetivan i iskoristite Ptolomejev poučak.
3. Nađite tetivni četverokut na slici i prisjetite se poučka o kutu između tetive i tangente.
4. Pronađite drugi tetivni četverokut na slici.
5. Koristeći svojstva tetivnog četverokuta koji je dan kružnicom koja prolazi točkama B, C i P pokažite da su mu 3 stranice jednake.
6. Nađite slične trokute i iskoristite omjere koje dobijete za dokazivanje nove sličnosti.
7. Pronađite tetivni četverokut i iskoristite njegova svojstva. Usto, dane točke su vrhovi cijelog niza međusobno sukladnih trokuta.
8. Uočite da se zadatak sastoji od dva podzadatka: prvo dokazujete da ako vrijedi lijeva strana ekvivalencije da vrijedi i desna, a potom obratno (u ovom slučaju ta 2 podzadatka se neće bitno razlikovati). Bit je pokazati da je $\triangle EDC \cong \triangle ABC$.
9. Ako s H označimo sjecište pravaca AD i FG, odredite veličine preostalih dvaju kuteva u $\triangle DGH$ (dakle, ona dva kuta koja nisu prava).
10. Dokažite da je četverokut $PBQR$ tetivan.
11. Glavna ideja je pokazati $\angle PQM + \angle PNM = 180°$, tj. $\angle AQB + \angle DQP = \angle PNM$. Drugi način je korištenjem sličnosti (i to puno puta), a glavna ideja je sve te sličnosti iskoristiti da dokažemo da je $\triangle BMN \sim \triangle BPQ$ (a zašto je to korisno prisjetite se u *zadatku 6.*).
12. Pokažite $|BC| = |BD|$, čime ostaje dokazati da je $\triangle BSD$ jednakokračan. Usto, vrijedit će da na pravcu AS leži visina (i što još?) u $\triangle ABC$.
13. Dokažite da $ABGH$ tetivni četverokut, odnosno da je $\angle ECA = \angle HGA$.

Rješenja

1. Označimo s $\overline{AB}$ danu tetivu, i neka dana tangenta dira kružnicu u točki A. Neka je $\angle ACB$ obodni kut kružnice (kojeg označimo s α), te S središte kružnice. Po poučku o obodnom i središnjem kutu je $\angle ASB = 2\alpha$, pa budući da je trokut ASB jednakokračan dobijemo da je $\angle SAB = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$. Kako je kut između dužine $\overline{OA}$ i tangente $90°$, dobijemo da je kut između tetive i tangente jednak upravo α.
2. Uočimo da je trokut ABC jednakostraničan, pa je $\angle ABC + \angle ADC = 60° + 120° = 180°$, tj. četverokut $ABCD$ je tetivan po *teoremu 5.* Koristeći Ptolomejev poučak na taj četverokut dobijemo $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$, pa zbog $|AB| = |BC| = |CA|$ vrijedi tvrdnja zadatka.
3. Uočimo da je $\angle CDB = \angle CEB$, pa po *teoremu 6.* zaključujemo da je četverokut $BCDE$ tetivan. Označimo $\angle ACB = \gamma$. Po teoremu o kutu između tetive i tangente je kut između tangente u točki A i pravca AB također jednak γ. Usto, po *teoremu 5.* zaključujemo da je $\angle AED = 180° - \angle BED = \gamma$. Sada zbog $\angle ACB = \angle AED$ slijedi tvrdnja zadatka.
4. Zbog $\angle FDE + \angle FBE = 90° + 90° = 180°$, po *teoremu 5.* $BEDF$ je tetivni četverokut. Sada uz pomoć *teorema 2.* imamo da je $\angle DCA = \angle DBA = \angle DBF = \angle DEF$, iz čega slijedi da su pravci AC i EF zaista usporedni.
5. Označimo s M polovište dužine $\overline{AB}$, te neka je $\angle ABC = \beta$. Četverokut $BCPM$ je tetivan, pa kako je pravac BP simetrala kuta $\angle ABC$, vrijedi $\angle PBM = \angle PBC = \frac{\beta}{2}$, te je po *teoremu 2.* $|PM| = |PC|$. Usto, iz jednakosti obodnih kuteva imamo da je $\angle MPB = \angle MCB = \beta - \angle PCM = \beta - \angle PBM = \frac{\beta}{2}$. Dakle, i trokut PMB je jednakokračan, tj. $|PM| = |BM|$. No, kako je M polovište $\overline{AB}$, $|BM| = |AM| = \frac{|AB|}{2}$, a kako je $|PC| = |BM|$ i $|AB| = |AC|$, vrijedi $|AP| = |AM|$. Sada smo jasno dobili da je $\triangle AMP$ jednakostraničan, pa je $\angle BAC = 60°$. Stoga zaključujemo da su svi kutevi u $\triangle ABC$ jednaki $60°$.

6. Iz jednakosti kuteva $\angle TBD = 180° - \angle ACD = \angle TAC$ (*teorem 5.*) i $\angle ATC = \angle DTB$, po K-K poučku o sličnosti zaključujemo da je $\triangle ATC \sim \triangle DTB$. Analogno se pokaže da je $\triangle ETC \sim \triangle DTF$. Iz prve sličnosti dobijemo da je $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$, a iz druge $\frac{|TE|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TF|}$, što kada pomnožimo da se riješimo nazivnika i spojimo dobijemo $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD| = |TE| \cdot |TF|$. Sada s obzirom da je $\angle ATE = \angle FTB$ i $\frac{|TE|}{|TB|} = \frac{|TA|}{|TF|}$, po S-K-S poučku o sličnosti je $\triangle ATE \sim \triangle FTB$. Jednakost kuteva koju dobijemo kao posljedicu sličnosti daje nam $\angle BAE + \angle BFE = \angle BAE + \angle TAE = 180°$, pa je četverokut $ABFE$ tetivan.

7. Pokazat ćemo da je četverokut $ABPF$ tetivan. Naime, po S-K-S poučku o sukladnosti je $\triangle BCE \cong \triangle CDF$, pa je $\angle ABP = 90° - \angle CBE = \angle BEC = \angle CFD = 180° - \angle AFP$, što povlači tetivnost. Nadalje, po S-K-S poučku o sukladnosti vrijedi i $\triangle BAF \cong \triangle CDF$, pa je $\angle CFD = \angle BFA$. Kako je četverokut $ABPF$ tetivan, slijedi $\angle BPA = \angle BFA$, pa kada sve spojimo vidimo da je $\angle BPA = \angle ABP$, zbog čega je $|AP| = |AB|$.

8. Na početku, uočimo da općenito na slici vrijedi $\angle CDB = \angle CAB = \angle CAD = \angle CBD$, zbog čega je $|BC| = |CD|$, te je $\angle EDC = 180° - \angle ADC = \angle ABC$. Znajući to, nije teško utvrditi da vrijedi sljedeći niz ekvivalencija: $|CE| = |CA| \iff \angle CEA = \angle CAE \iff \triangle EDC \cong \triangle ABC$ (S-K-S poučak) $\iff |DE| = |AB|$.

9. Označimo s H sjecište pravaca AD i FG, te $\angle HDG = \alpha$. Pokazat ćemo da je $\angle HGD = 90° - \alpha$, iz čega će, promatrajući $\triangle HDG$, slijediti tvrdnja zadatka.

   Četverokut $ABCD$ je tetivan, pa je $\angle ABC = \angle HDG = \alpha$. Vrijedi da je $\triangle BEF \cong \triangle CEF$ (S-K-S poučak), pa je $\angle BCE = \angle CBE = \alpha$. Sada, kako je četverokut $EFCG$ tetivan, vrijedit će $\angle EGF = \angle ECF = \alpha$ i $\angle EGC = 180° - \angle EFC = 90°$. Sada je $\angle HGD = \angle CGF = \angle EGC - \angle EGF = 90° - \alpha$, što smo i željeli.

10. Državno natjecanje 2014., A varijanta, 1. razred, 3. zadatak

11. *1. rješenje:* Označimo $\angle AQB = \alpha$ i $\angle DQP = \beta$ (onda je $\angle PQM = 180° - \alpha - \beta$). Koristeći jednakosti obodnih kuteva i svojstva tetivnih četverokuta dobijemo da vrijede sljedeća 2 niza jednakosti: $\alpha = \angle AQB = \angle ACB = \angle ACS = 180° - \angle ARS = \angle BRS$ i $\beta = \angle DQP = 180° - \angle AQP = \angle ABP$. Sada je $\angle PNM$ vanjski kut trokuta RBN, pa je on jednak $\alpha + \beta = 180° - \angle PQM$, što je i trebalo dokazati.

    2. rješenje: Kao u 1. rješenju dobijemo $\alpha = \angle AQB = \angle MRB = \angle ACB$. Koristeći to, pomoću K-K poučka o sličnosti pokažemo da je $\triangle AQB \sim \triangle MRB$ i $\triangle ABC \sim \triangle SBR$. Izjednačavajući omjere stranica dobivamo redom da je $|BA||BR| = |BM||BQ|$ i $|BA||BR| = |BC||BS|$. Korištenjem jednakosti obodnih kutova i tetivnosti četverokuta $ARSC$ dobivamo $\angle BPC = \angle BAC = \angle RAC = 180° - \angle RSC = \angle BSN$, pomoću čega po K-K poučku o sličnosti zaključujemo da je $\triangle CBP \sim \triangle NBS$, zbog čega je $|BC||BS| = |BN||BP|$. Iz triju jednakosti koje smo dobili kao posljedicu sličnosti triju parova trokuta dobivamo da je $|BM||BQ| = |BN||BP|$, a kako je očito i $\angle MNB = \angle PBQ$, po S-K-S poučku o sličnosti je $\triangle BMN \sim \triangle BPQ$. Sada izjednačavanjem kutova u ta 2 trokuta dobivamo da je četverokut $MNPQ$ tetivan.

12. Prvo, budući da je trokut ABC jednakokračan, vrijedi $\angle ABC = \angle BCA = 72°$, pa je $\angle DBC = 108°$. Nadalje, i trokut ACD je jednakokračan (sjetimo se, C je središte kružnice na kojoj leže A, D i E), pa je $\angle ADC = \angle DAC = 36°$. Tada lako odredimo veličinu preostalog kuta u $\triangle BDC$, a to je $\angle BCD = 36°$, pa je taj trokut jednakokračan, tj. vrijedi $|BD| = |BC|$. Sada je dovoljno dokazati da je $|BD| = |DS|$, odnosno $\angle DBS = \angle DSB$.

    Četverokut $BDEC$ je tetivan, pa je $\angle DEC = 72°$. Kako je $\triangle CDE$ jednakokračan, dobijemo da je $\angle DCE = 36°$. Po poučku o obodnom i središnjem kutu je onda $\angle DAE = \frac{\angle DCE}{2} = 18° = \frac{\angle BAC}{2}$. Dakle, pravac AE je simetrala kuta $\angle BAC$, a kako je A sjecište krakova jednakokračnog trokuta, onda je taj pravac ujedno i simetrala dužine $\overline{BC}$. Kako točka S leži na toj simetrali, vrijedi da je $\triangle BSC$ jednakokračan, pa iz toga slijedi da je $\angle DSB = 180° - \angle BSC = 72°$. Sada kada znamo veličinu tog kuta i kuta $\angle BDC$, promatrajući $\triangle BSD$ dobijemo $\angle DBS = 72° = \angle DSB$.

13. Državno natjecanje 2015., A varijanta, 1. razred, 5. zadatak