# KAGH nejednakost

| S4 | Seniorska grupa |
|---|---|

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Goran Ivanković

26.10.2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

---

## Uvod

Cilj ovog predavanja je unaprijediti vaše znanje o nejednakosti među sredinama. KAGH nejednakost je nejednakost između kvadratne, aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine.
**Teorem:** Neka su $x_1, x_2 \cdots, x_n$ pozitivni realni brojevi, vrijedi:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

Znak jednakosti između bilo koje dvije vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Vjerojatno je najmoćnija i najčešća od njih između aritmetičke i geometrijske sredine (AG skraćeno).

**Dokaz:**
KA nejednakost izravna je posljedica CSB nejednakosti (ili Cauchy-Schwarz koja se koristi tek na državnom natjecanju i olimpijadama te vam trenutačno nije potrebna).

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(1+1+\cdots+1) \geq (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$$

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

Dokažimo AG nejednakost, tj. da je:

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}.$$

Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da vrijedi $x_1x_2\cdots x_n = 1$. Dakle, želimo pokazati $x_1x_2\cdots x_n = 1 \implies x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n$.
Dokažimo indukcijom po n.
Za n = 1 tvrdnja očito vrijedi. Za n = 2 dobivamo $x_1+x_2-2 = x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2} = (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geq 0$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 2$.
Neka su $x_1, \cdots, x_{n+1}$ pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1\cdots x_n x_{n+1} = 1$. Pretpostavimo da je $x_1 \geq 1 \geq x_2$. Kako je $(x_1x_2)x_3\cdots x_n = 1$, po pretpostavci indukcije vrijedi $x_1x_2+x_3+\cdots+x_{n+1} \geq n$. Stoga je potrebno pokazati da je $x_1x_2+1 \leq x_1+x_2$. Vrijedi $x_1x_2+1-x_1-x_2 = (x_1-1)(x_2-1) \leq 0$, čime je tvrdnja dokazana.

GH nejednakost izravno slijedi iz AG nejednakosti. Znamo da vrijedi

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1\cdots x_n}}$$

Uzmemo li recipročnu vrijednost obiju strana, dobivamo:

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

**Dobro za znati:** Čim se u zadatku spominju nenegativni realni brojevi i nejednakost, velika je mogućnost da se radi upravo o KAGH nejednakosti. Ponekad se nejednakosti koriste u jednakostima. Ako vrijedi $L = R$, pokušajte dokazati da je $L \geq x$ te $R \leq x$. Tada mora vrijediti $L = R = x$. Primijenite supstituciju kako biste sveli izraz na ljepši oblik i mnogo si olakšali dokazivanje.

**Za one znatiželjne:** Sljedeću nejednakost zovemo AG nejednakost s težinama i nije vam trenutačno potrebna. Neka su $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nenegativni realni brojevi te neka su $w_1, w_2, \cdots, w_n$ dane nenegativne realne težine. Neka je $w = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$. Tada vrijedi nejednakost:

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w} \geq \sqrt[w]{x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n}}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su svi $x_k$ jednaki. Nećemo je dokazivati jer je zbilja nepotrebna.

## Lakši zadaci

1. Dokaži da za sve $x, y > 0$ vrijedi nejednakost $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy$.
2. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, dokažite nejednakost $(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8$.
3. Neka su O i P redom opseg i površina pravokutnika. Dokaži da vrijedi $O \geq \frac{24P}{O+P+1}$.
4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a + b + c = abc$.
   Dokaži da vrijedi $a^5(bc-1) + b^5(ca-1) + c^5(ab-1) \geq 54\sqrt{3}$.
5. Dokažite da za svaka dva realna broja $a \geq 0$ i $b \geq 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a + \sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{ab^2} + b}{4} \leq \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3}.$$

## Srednji zadaci

6. Za pozitivne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n, n \geq 2$ označimo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s$. Dokažite nejednakost

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

7. Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $xyz = 1$. Dokaži nejednakost: $\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geq 0$.
8. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je a + b + c = 1. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{2}.$$

9. Nađi najmanju vrijednost od $\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ za $0 < x < \pi$.
10. Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta.
    Dokaži da vrijedi $\left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

## Teži zadaci

11. Dokažite da u svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$\frac{\cos\alpha}{a^3} + \frac{\cos\beta}{b^3} + \frac{\cos\gamma}{c^3} \geq \frac{3}{2abc}$$

pri čemu su a, b, c duljine stranica trokuta, te $\alpha, \beta, \gamma$ odgovarajući kutovi.

12. Neka su $a, b, c$ realni brojevi takvi da vrijedi: $\sqrt{a^3 + c^2(a+b)} + \sqrt{b^3 + a^2(b+c)} + \sqrt{c^3 + b^2(c+a)} = 3abc$
    Dokaži:

$$\sqrt{\frac{a}{a^2+ab+b^2}} + \sqrt{\frac{b}{b^2+bc+c^2}} + \sqrt{\frac{c}{c^2+ca+a^2}} \leq (abc)^{\frac{1}{3}}$$

.

## Rješenja

1. https://www.skoljka.org/solution/2609/
2. https://www.skoljka.org/solution/7292/
3. https://www.skoljka.org/solution/5628/
4. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2011/2011-SS-zup-1234-AB-zad+rj/2011-SS-zup-3-A-rj.pdf
5. https://www.skoljka.org/solution/50/
6. https://www.skoljka.org/solution/436/
7. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2006/2006-SS-drz-1234-AB-zad+rj/2006-SS-drz-1234-A-zad%2Brj.pdf
8. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1999/1999-SS-drz-1234-zad+rj/1999-SS-drz-123 2Brj.pdf
9. https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1983_AIME_Problems/Problem_9
10. https://www.skoljka.org/solution/5614/
11. https://www.skoljka.org/solution/102/
12. https://artofproblemsolving.com/community/c6t30679f6h1809078_an_inequality_about_positive_real_numbers_abc