O2	Olimpijska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Transformacije u geometriji

Luka Milačić

12. listopada 2019.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Uvod

Transformacija je ideja u geometriji gdje ćemo po određenom pravilu točke, kružnice ili pravce poslati u neke druge tako da nam se određena svojstva očuvaju i uz to dobijemo neka druga svojstva s kojima nam je laše riješiti zadatak. Naše 3 glavne transformacije koje ćemo koristiti biti će homotetija, spiralna simetrija i kružna inverzija(za ovo predavanje preporučeno je da ste se već streli sa ovim transformacijama prije). Ideje u zadacima će biti korištenja neke od tih tranformacija da dobijemo neke lijepše točke s kojima ćemo lakše i brže riješiti jako teške zadatke.

Ideje 1. Ineverzija oko poznatih kružnica u trokutu kao što su opina, upisana,pripisana,...

Ideje 2. Ineverzija oko kružnice sa središtem u vrha A radijusa $\sqrt{AC \cdot AB}$

Ideja 3. Ako su pravci konkurentni moguće je dokazati da za točke na tim pravcima postoji centar homotetije iz čega slijedi da je taj centar sjecište tih pravaca.

Ideja 4. Ako je dan nekakav četverokut najbolje mu je produžiti sve stranice i tako dobiti jako korisnu Miquelova konstrukciju.

Ideja 5. Korištenejm spiralne sličnosti omjeri ostaju očuvani pa i s njom možemo preslikavai određene točke kao i u homotetiji.

Lakši do umjereni zadaci

1. Dan je ΔABC sa težištem G i opisanom kružnicom k. Točka A_1 simetrična je točki A preko simetrale stranice BC. Pravac A_1G siječe BC u D. Neka je E presjek k i AD. Neka su X, Y, Z i W preslike točke D preko AB, AC, CE i BE. Dokaži da je četverokut $XYZW$ tetivan.

2. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut čije se dijagonale sijeku u P. Neka su O_1 i O_2 redom središta kružnica opisanih ΔAPD i ΔBPC. Neka su M, N i O polovišta AC, BD i O_1O_2. Dokaži da je O središte kružnice opisane ΔMPN.

3. Dana su 2 pravca na kojima su točke A_1, A_2, A_3 odnosno B_1, B_2, B_3 za koje vrijedi $\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3} = k$. Na dužinama A_1B_1, A_2B_2 i A_3B_3 leže točke C_1, C_2 i C_3. Ako vrijedi $\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2} = \frac{A_3C_3}{B_3C_3} = m$ onda su C_1, C_2 i C_3 kolinearne i uz to vrijedi $\frac{C_1C_2}{C_1C_3} = k$. ($k$ nije nužno jednak m)

Teži zadaci

4. Neka je A_0 nožište iz vrha A na stranicu BC u šiljastokutnom ΔABC. A_x je točka na AB t.d. je $CA_x || AA_0$. A_y je presjek A_xA_0 i AC te je A_1 presjek BA_y i AA_0. Definirajmo isto B_1 i C_1. Neka upisana kružnica ΔABC dira BC, AC i AB redom u D, E i F i neka joj je I središte. Ako je O središte opisane kružnice ΔABC dokaži da se pravci A_1D, B_1E, C_1F i IO sijeku u jednoj točki.

5. Neka je I središte upisane kružnice ΔABC koja dira BC, AC i AB redom u D, E i F. Kružnica opisana ΔEFA siječe opisanu kružnicu ΔABC u X. Kružnice opisane ΔFIC i ΔEIB sijeku se u Y. Kružnica koja prolazi kroz B i C dira upisanu kružnicu u H. Dokaži da je $IHXY$ tetivan četverokut.

6. Neka su O i G središte opisane kružnice odnosno težište od ΔABC. Iz točke A na pravac OG spuštena je visina u točki D. S je točka takva da je $DS = AS$. Kružnica sa središtem S radijusa AS siječe AB i AC redom u X i Y. Ako je P nožište visine iz A na BC, a M polovište BC dokaži da su P i M jednako udaljeni od središta kružnice opisane ΔXSY.

Jako teški zadaci

7. Dan je ΔABC sa opisanom kružnicom k, središtem upisane kružnice I i središtem pripisane kružnice I_A (nasuprot vrha A). Neka je M polovište II_A i D presjek BC i AI. Neka je G nožište okomice iz I_A na BC. P je presjek k i kružnice promjera AI_A. Dokaži da su M, G i P kolinearni.

8. Dvije kružnice jednakih radijusa k_1 i k_2 sijeku se u P i Q. Neka je O polovište PQ. Dužine AB i CD različite od PQ prolaze kroz P tako da A i C leže da k_1, a B i D na k_2. Neka su M i N polovišta AD i BC redom t.d. se ne podudaraju sa O. Dokaži da su M, N i O kolinearni.

9. Dan je ΔABC sa središtem upisane kružnice I te opisanom kružnicom k. Neka upisana kružnica ΔABC dira BC u D te neka je A_1 točka centralno simetrična A preko k. L je polovište većeg luka BC i P je presjek A_1I i BC. Presjek ID i AP je Q, a X je presjek LQ i k. Dokaži da su kružnice opisane ΔIDP i ΔQDX okomite.