O3	Olimpijska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Vjerojatnosna metoda

Jakov Cigrovski

19. listopada 2019.

Mladi nadareni matematičari ”Marin Getaldić”

mnm.hr | Mladi nadareni matematičari ”Marin Getaldić” | matematicari.mnm

1 Očekivana vrijednost

Da bi razumjeli što je to očekivana vrijednost prvo trebamo definirati slučajnu varijablu. Nećemo se služiti nekom formalnom definicijom, nego ćemo samo reći da je to vrijednost koja se bira slučajno i najčešće ćemo ju označavati s X. (Npr. ako kažemo da je $X =$ iznos bacanja standardne kocke onda je X $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ali ne znamo koja joj je točna vrijednost.) Sada možemo definirati očekivanu vrijednost slučajne varijable koju označavamo s $\mathbb{E}[X]$.

Definicija 1.1 (Očekivana vrijednost)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x \mathbb{P}(X = x) \cdot x$$

Ovdje $\mathbb{P}(X = x)$ predstavlja vjerojatnost da se dogodi događaj $X = x$. (Ako se vratimo na primjer s bacanjem kocke $\mathbb{P}(X = 3)$ bi označavalo vjerojatnost da bacanje kocke dobijemo rezultat 3.)

Za isti primjer možemo izračunati očekivanu vrijednost:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x \mathbb{P}(X = x) \cdot x = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}[X = i] \cdot i = 1 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

Pozor!
Glavno svojstvo očekivane vrijednosti koje ćemo mi koristit je:

$$(E[X] = k) \implies (\mathbb{P}(X \geq k) > 0 \ \& \ \mathbb{P}(X \leq k) > 0)$$

Tj. postoji slučaj kada je $X \geq k$ i postoji slučaj kada je $X \leq k$ što se lagano može vidjeti iz definicije očekivane vrijednosti.

Primjer 1.1. Na IMO-u je n osoba i svaka osoba ima oznaku sa svojim imenom (ne postoje 2 osobe s istim imenom). Uzmemo sve oznake, promiješamo ih i nasumično podijelimo nazad. Označimo sa A broj ljudi koji su dobili svoje ime nazad. Dokaži da je očekivana vrijednost od A jednaka 1.

Rješenje 1.1. Radi lakšeg zapisa recimo da su imena tih osoba 1 do n. Definirajmo skup S kao skup svih permutacija brojeva $1, 2, \ldots, n$. $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n \ \mid \ \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$, te za $x \in S$ definirajmo $f(x)$ kao broj fiksnih točaka u x.
Neka je X - nasumična permutacija, nas zanima kolika je očekivana vrijednost za broj fiksnih točaka te permutacije.

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X = x) \cdot f(x) = \sum_{x \in S} \frac{1}{n!} \cdot f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{x \in S} f(x) = \frac{1}{n!} \cdot n \cdot (n-1)! = 1$$

Teorem 1.2 (Linearnost očekivanja)

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]$$

Dokaz je većinom raspisivanje suma i nije instruktivan za ovo predavanje pa ga neću uključiti.

Primjer 1.2. Pokušajmo sada rješiti primjer 1.1 koristeći se naučenim teoremom:

Rješenje 1.2.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ako osoba } i \text{ dobije ime } i \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Za X - broj fiksnih osoba očito vrijedi $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ stoga:

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 1) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Uz pomoć teorema 1.2 smo elegantnije dokazali tvrdnju!

2 Direktni dokaz postojanja

U ovoj metodi umjesto da tražimo primjer konfiguracije mi ćemo samo pokazati da takva konfiguracija mora postojati zbog prije spomenutog svojstva očekivane vrijednosti.

Primjer 2.1. U svako polje 100×100 tablice upisan je jedan od brojeva $1, 2, \ldots, 100$ tako da se svaki broj pojavljuje točno 100 puta. Dokaži da postoji redak ili stupac u kojem se pojavljuje barem 10 različitih brojeva.

Rješenje 2.1. Odaberimo random redak ili stupac te sa X označimo broj različitih brojeva u njemu. Neka je

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_i, I_i = \begin{cases} 1 & \text{ako se } i \text{ nalazi u odabranom redu ili stupcu} \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[I_1] + \mathbb{E}[I_2] + \cdots + \mathbb{E}[I_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(I_i = 1) \geq n \cdot \frac{2\sqrt{n}}{2n} = 10$$

Potrebno je još pokazati zadnju nejednakost. Označimo s k broj redaka u kojima se nalazi i, onda se i nalazi u barem $\frac{n}{k}$ stupaca pa vrijedi:

$$P(I_i) \geq \frac{k + \frac{n}{k}}{2n} \geq \frac{2\sqrt{n}}{2n}$$

Te možemo zaključiti da postoji red ili stupac s barem 10 različitih brojeva.

3 Alteracija

Sada ćemo zadatku pristupati malo drugačije. Umjesto da uzimamo random konfiguraciju i tražimo očekivanu vrijednost toga što nas zanima, svaki element ćemo birati s nekom vjerojatnosti p te nakon toga oduzeti broj očekivanih "loših" situacija. Malo je nejasno ovako rečeno, ali postat će jasnije u primjeru.

Primjer 3.1 (MEMO 2011)**.** Na jednom matematičkom natjecanju sudjeluje $3n$ učenika, govori se n različitih jezika, a svaki učenik govori točno 3 različita jezika. Dokaži da je moguće odabrati bar $\lceil \frac{2n}{9} \rceil$ jezika tako da niti jedan učenik ne govori više od dvaju odabranih jezika.

Rješenje 3.1. Neka je S prazan skup. Svaki jezik biramo s vjerojatnošću p te ako je izabran stavljamo ga u S. Lako je vidjeti $\mathbb{E}[|S|] = np$. Neka je X broj učenika čija su sva tri jezika izabrana, onda je:

$$\mathbb{E}[X] = 3np^3$$

$$\implies \mathbb{E}[|S| - X] = np - 3np$$

Sada odabirom $p = \frac{1}{3}$ dobivamo $\mathbb{E}[|S| - X] = \frac{2n}{9}$ što implicira tvrdnju koju smo trebali dokazati.

4 Zagrijavanje

1. U Pragu je 1600 delegata koji su osnovali 16000 odbora, svaki ima točno 80 članova. Dokaži da možemo pronaći 2 odbora koja imaju barem 4 zajednička člana.

2. U grafu s n čvorova i prosječnim stupnje d pokaži da postoji independent set [1] veličine barem $\frac{n}{2d}$.

5 Zadaci

1. Neka je A skup od n različitih ostataka modulo n^2. Dokaži da postoji skup B od n različitih ostataka modulo n^2 takav da skup $A + B = \{a + b | a \in A; b \in B\}$ sadrži barem:

   (a) $\frac{1}{2}n^2$

   (b) $(1 - \frac{1}{e})n^2$

   različitih ostataka modulo n^2.

2. U jednom gradu živi n ljudi te svatko poznaje točno 1000 drugih ljudi (poznanstva su uzajamna). Dokaži da je moguće odabrati podskup ljudi S takav da bar $\frac{n}{2017}$ ljudi iz S pozanje točno dvoje ljudi iz S.

3. Zadan je bipartitan graf s n čvorova, pri čemu svaki čvor ima pridruženu listu od više od $log_2(n)$ boja. Dokaži da postoji kromatsko [2] bojanje čvorova tog grafa sa svojstvom da je svaki čvor obojan nekom bojom iz svoje liste

4. Skup S zovemo *slobodnim* ako ne postoje $x, y, z \in S$ takvi da $x + y = z$. Dokaži da svaki skup A, cijelih brojeva različitih od 0, sadrži $S \subset A$ takav da je S *slobodan* i da vrijedi $|S| > \frac{|A|}{3}$.

5. Familija podskupova n-članog skupa naziva se antilanac ako ne sadrži dva skupa takva da je jedan pod- skup drugog. Ako je $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ antilanac, tada vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\binom{|A_i|}{k}} \leq 1$$

[1] independent set - skup vrhova takvih da nikoja dva nisu povezana bridom

[2] bojanje je kromatsko ako nikoja dva čvora spojena bridom nisu iste boje