Algebarski izrazi

25.10.2015.

Uvod

Započnimo sa zadatkom s kojim se dio vas već susreo natječući se u osnovnoj školi.

Zadatak 1.
Izračunajte vrijednost izraza:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{25 \cdot 28} + \frac{1}{28 \cdot 31}.$$

Rješenje.
$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{31}\right) = \frac{10}{31}$.

Uočimo da rješavajući prethodni zadatak zapravo koristimo jednakost oblika

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right),$$

koja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$ (zapravo, n uopće ni ne mora biti prirodan broj). Upravo zato je ovakav izraz općenitiji od konkretnih brojevnih izraza, on sadrži *varijable* koje mogu poprimati bilo koju vrijednost u nekom zadanom skupu brojeva. S idejom promatranja takvih izraza, *algebarskih izraza*, već ste se sreli u osnovnoj školi i tada pokazali neke osnovne identitete među algebarskim izrazima. Cilj ovog predavanja je te identitete ponoviti, pokazati još neke te pokazati neke zadatke natjecateljskog tipa u kojima se ti identiteti primjenjuju.

Osnovni algebarski izrazi

Izrazi poput $a, 3a^7b, cdef, \frac{4}{13}a^2d^{15}$ zovu se *monomi*, pri čemu su a, b, c, d, e, f *varijable* ili opći brojevi. Zbroj konačno mnogo monoma zove se *polinom* ili višečlani izraz (specijalno, zbroj dvaju monoma zove se *binom* ili dvočlani izraz, dok se zbroj triju monoma zove *trinom* ili tročlani izraz). Svaki izraz koji sadrži varijable zove se *algebarski izraz*, a dio matematike koji proučava algebarske izraze zove se *algebra*. Kod računanja s algebarskim izrazima vrijede ista pravila kao i kod računanja s brojevima (ponovite ta pravila).

Već otprije poznajete formule za *kvadrat zbroja i razlike dvaju brojeva*:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{1}$$

Formule (1) se jednostavno zovu **kvadrat binoma** i kraće se zapisuju:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2. \tag{2}$$

Sve se navedene formule jednostavno izvode primjenom svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju, ili kraće, množenjem "svakog sa svakim".

Slična formula postoji i za kub zbroja i razlike dvaju brojeva:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \tag{3}$$

Pokušajte te formule izvesti množeći "svakog sa svakim". Te se formule zovu **kub binoma** i skraćeno zapisuju kao

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3. \tag{4}$$

Zadatak 2.
Ako je jedan od pribrojnika u izrazu

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$$

jednak nuli, tada je cijeli izraz jednak nuli. Dokažite.

Rješenje.
Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = \\
&\left.\begin{array}{l} x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\ y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 \\ z^3 - 3z^2x + 3zx^2 - x^3 \end{array}\right\} + = \\
&-3x^2(y-z) + 3x(y^2-z^2) - 3yz(y-z) = \\
&(y-z)[-3x^2 + 3x(y+z) - 3yz] = \\
&(y-z)(-3x^2 + 3xy + 3xz - 3yz) = \\
&(y-z)[3x(z-x) - 3y(z-x)] = \\
&(y-z)(z-x)(3x-3y) = \\
&3(x-y)(y-z)(z-x).
\end{aligned}$$

Budući da je produkt jednak nuli ako i samo ako je jedan od faktora jednak nuli, vrijedi tvrdnja zadatka. Uočite kako je zapisano raspisivanje pribrojnika u drugom redu (takav zapis omogućava bolju preglednost izraza - što se sve pokratilo u drugom redu?).

Prisjetimo se formule za **razliku kvadrata**:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b). \tag{5}$$

Također postoje analogne formule za **zbroj i razliku kubova**. Njihovi izvodi slijede iz formule za kub binoma. Izvedimo ih! Za zbroj kubova vrijedi:

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 \\
&= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\
&= (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] \\
&= (x+y)(x^2 - xy + y^2).
\end{aligned}$$

Analogno izvodimo i formulu za razliku kubova:

$$\begin{aligned}
x^3 - y^3 &= (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 \\
&= (x-y)^3 + 3xy(x-y) \\
&= (x-y)[(x-y)^2 + 3xy] \\
&= (x-y)(x^2 + xy + y^2).
\end{aligned}$$

Skraćeno ove formule zapisujemo:

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2). \tag{6}$$

Zadatak 3.
Ako za brojeve a, b, c vrijedi $a + b + c = 0$, dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3.$$

Rješenje.
Nakon množenja tvrdnje zadatka sa abc dobivamo

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Dokažimo to. Uz korištenje uvjeta zadatka slijedi

$$\begin{aligned}
a^3+b^3+c^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3 \\
&= -c(a^2-ab+b^2)+c^3 \\
&= c(c^2-a^2+ab-b^2) \\
&= c[(a+b)^2-a^2+ab-b^2] \\
&= c(a^2+2ab+b^2-a^2+ab-b^2) \\
&= 3abc,
\end{aligned}$$

i dokaz je završen. Pokušajte riješiti i zadatak 2 pomoću formule (6).

Navest ćemo još i formulu za **kvadrat trinoma**:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca, \tag{7}$$

a vi je pokušajte dokazati za vježbu.

Faktorizacija

Primijetimo kako smo u svim dosadašnjim primjerima rastavljali algebarske izraze na faktore. *Faktorizacija algebarskih izraza* je vrlo bitna jer se njome izrazi bitno mogu pojednostavniti. Kako sve možemo faktorizirati algebarske izraze?

- ⇝ izlučivanjem zajedničkog faktora
- ⇝ grupiranjem članova
- ⇝ prikazivanjem pojedinih članova u obliku zbroja, tj. razlike
- ⇝ upotrebom formula (kvadrat i kub binoma, razlika kvadrata i kubova, zbroj kubova . . .)

Zadatak 4.
Skratite razlomak:

$$\frac{(a^3-6a^2+12a-8)(6+3a)}{(a^3+8)(a^2-4a+4)}.$$

Rješenje.
U ovom je zadatku uputno primijeniti formule na određene faktore:

$$\begin{aligned}
\frac{(a^3-6a^2+12a-8)(6+3a)}{(a^3+8)(a^2-4a+4)} &= \frac{3(a-2)^3(a+2)}{(a+2)(a^2-2a+4)(a-2)^2} \\
&= \frac{3(a-2)}{a^2-2a+4}.
\end{aligned}$$

Objasnite koje su formule bile gdje korištene.

Vrlo često je potrebno faktorizirati *kvadratne trinome*, tj. izraze oblika ax^2+bx+c, pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$ neke konstante. Ukoliko je faktorizacija moguća, ona se provodi tako da srednji član prikažemo u obliku zbroja (razlike) dvaju izraza čiji je umnožak jednak umnošku prvog i posljednjeg člana trinoma. Novonastali članovi zatim se pogodno grupiraju i izluče se zajednički faktori. Idući zadatak nam pokazuje konkretne primjere takve faktorizacije.

Zadatak 5.
Skratite razlomak:

$$\frac{(8a^2-6ab+b^2)(2a^2+5ab-3b^2)}{(4a^2-9ab+2b^2)(a^2+5ab+6b^2)}.$$

Rješenje.
Svaki od faktora u brojniku i nazivniku jest kvadratni trinom koji trebamo rastaviti na faktore. Radi preglednosti učinit ćemo to na svakom faktoru posebno:

$$\begin{aligned}
8a^2-6ab+b^2 &= 8a^2-4ab-2ab+b^2\\
&= 4a(2a-b)-b(2a-b)\\
&= (2a-b)(4a-b),\\[1em]
2a^2+5ab-3b^2 &= 2a^2-ab+6ab-3b^2\\
&= a(2a-b)+3b(2a-b)\\
&= (2a-b)(a+3b),\\[1em]
4a^2-9ab+2b^2 &= 4a^2-ab-8ab+2b^2\\
&= a(4a-b)-2b(4a-b)\\
&= (4a-b)(a-2b),\\[1em]
a^2+5ab+6b^2 &= a^2+2ab+3ab+6b^2\\
&= a(a+2b)+3b(a+2b)\\
&= (a+2b)(a+3b).
\end{aligned}$$

Sada dobivamo kako je početni izraz jednak $\dfrac{(2a-b)^2}{a^2-4b^2}$.

Neke primjene algebarskih izraza

Faktorizacija algebarskih izraza može se primijeniti i kod djeljivosti - rastavljanjem izraza na faktore možemo ispitati svojstva djeljivosti prirodnih i cjelih brojeva.

Zadatak 6.
Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.

Rješenje.
Neka su to brojevi $n-1, n, n+1$. Tada vrijedi

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 = 3n^3+6n = 3n(n^2+1).$$

(Dokažite gornji identitet.)
Dakle, treba pokazati da je izraz $n(n^2+1)$ djeljiv s 3. Ako je n djeljiv s 3, tvrdnja je očita. Ako je $n=3k+1$ ili $n=3k+2$, tada je n^2+1 djeljiv s 3 (dokažite raspisivanjem ili pomoću kongruencija). Zato je očito kako za svaki prirodan broj n vrijedi tvrdnja zadatka.

I u računskim zadatcima možemo primijeniti algebarske izraze uočavanjem brojevnih veza i pogodnom supstitucijom (uočite da smo to iskoristili i u zadatku 1 kao motivaciju za ovo predavanje).

Zadatak 7.
Usporedite brojeve $\sqrt{2014\cdot 2016}$ i 2015.

Rješenje.
Neka je $x=2015$, tada je

$$\begin{aligned}
\sqrt{2014\cdot 2015} &= \sqrt{(x-1)(x+1)}\\
&= \sqrt{x^2-1}\\
&< \sqrt{x^2}\\
&= x.
\end{aligned}$$

Dakle, $2015 > \sqrt{2014\cdot 2015}$.

U zadatcima koji slijede imate priliku iskoristiti tehnike i formule koje su u ovom predavanju izložene. Za neke je zadatke dano samo konačno rješenje (ili uputa za rješavanje) kako biste samostalno mogli provesti čitav postupak i provjeriti svoje rješenje, a neki su zadatci dani vama za potpuno samostalni rad.

Zadatci, upute i rješenja

Zadatak 8.
Pojednostavnite izraz:

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \cdot \frac{ab+bc+ca}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}} : \frac{1}{\frac{1}{abc}}.$$

Rješenje.
abc.

Zadatak 9.
Nađite vrijednost razlomka

$$\frac{a+b}{a-b}$$

ako je $2a^2 + 2b^2 = 5ab$, $0 < a < b$.

Rješenje.
Vrijednost izraza je -3. Uputa: koristite se formulom (2).

Zadatak 10.
Dokažite da za svaki $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ vrijedi jednakost

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} = \frac{16}{1-a^{16}}.$$

Rješenje.
Uputa: iskoristite formulu (5).

Zadatak 11.
(**Identitet Sophie Germain**) Faktorizirajte izraz $a^4 + 4b^4$.

Rješenje.
$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \overset{(2)}{=} (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \overset{(5)}{=} (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$.

Zadatak 12.
Faktorizirajte izraz $x^4 + x^2 + 1$.

Rješenje.
$(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$. Uputa: pokušajte pojedine pribrojnike nadopuniti do kvadrata zbroja slično kao u pretnodnom zadatku.

Zadatak 13.
Dokažite posebnu varijantu tzv. **Lagrangeovog identiteta**:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Zadatak 14.
Neka je $S = \{m \in \mathbb{Z} \colon m = a^2 - 5b^2,\ a, b \in \mathbb{N}\}$. Pokažite da je umnožak dva elementa skupa S ponovno element skupa S.

Zadatak 15.
Dokažite da iz $a + b + c = 0$ slijedi

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Rješenje.
Uputa: iskoristite formulu (7).

Zadatak 16.
Postoje li brojevi a, b, c za koje je izraz
$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}$$
jednak nuli ako nijedan od pribrojnika nije jednak nuli i svi su pribrojnici definirani?

Rješenje.
Takvi brojevi ne postoje. Uputa: za srednji pribrojnik iskoristite identitet $b-c=-(a-b)-(c-a)$, pogodno grupirajte članove i faktorizirajte dani izraz.

Zadatak 17.
Rastavite izraz na faktore:
$$(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3.$$

Rješenje.
Uputa: za srednji član iskoristite isti trik kao u prethodnom zadatku, pogodno grupirajte članove te iskoristite formulu (6), a zatim i (2).

Zadatak 18.
Pojednostavnite:
$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Rješenje.
Svođenjem na zajednički nazivnik (pripazite na predznake faktora u nazivnicima) dobivamo da je izraz jednak 0.

Zadatak 19.
Ako vrijedi
$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0,$$
onda je također
$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$
Dokažite.

Rješenje.
Uvjet zadatka množite redom s $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$ i $\frac{1}{a-b}$ te tako dobivene 3 jednakosti zbrojite. Zatim iskoristite sličan trik kao u prethodnom zadatku.

Zadatak 20.
Pojednostavnite sljedeće algebarske izraze:

(a) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$,

(b) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$,

(c) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

Rješenje.
(a) 0; **(b)** 1; **(c)** $a+b+c$.

Zadatak 21.
Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj

(a) $n^3 - n$,

(b) $n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n$,

djeljiv sa 6.

Rješenje.
Uputa: kao i u zadatku 6, faktorizirajte zadane izraze i onda promatrajte slučajeve u ovisnosti o tome koje ostatke može davati broj n pri dijeljenju s 2, odnosno 3.

Zadatak 22.
Dokažite sljedeće tvrdnje:

(a) Ukoliko je razlika kvadrata dvaju prirodnih brojeva djeljiva s 2, onda je ona djeljiva i s 4.

(b) Ne postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da su oba broja

$$\sqrt{3^k + 7},\ \sqrt{3^{k+1} + 7}$$

istovremeno prirodna.

Rješenje.
Tvrdnja **(a)** se dokazuje slično kao i u zadatku 6 te prethodnom zadatku. Dokazat ćemo drugu tvrdnju.

(b) Pretpostavimo da takav broj k postoji. Promotrimo razliku kvadrata danih brojeva:

$$\left(\sqrt{3^{k+1}+7}\right)^2 - \left(\sqrt{3^k+7}\right)^2 = 3^k \cdot 2.$$

Uočimo da je dobiveni izraz djeljiv s 2, ali nije djeljiv i s 4, što je u kontradikciji s **(a)** dijelom zadatka.

Zadatak 23.
Skratite sljedeće razlomke:

(a) $\dfrac{t^3 + 3t(t+1) + 1}{t^3 + t(t-1) - 1}$,

(b) $\dfrac{(7zy+1)^3 - 8z^3y^3}{67z^2y^2 + 16zy + 1}$,

(c) $\dfrac{8a^2 + 18ab - 5b^2}{12a^2 + 17ab - 5b^2} \cdot \dfrac{5b^2 - 32ab - 21a^2}{9b^2 - 67ab + 28a^2} \cdot \dfrac{28a^2 - 75ab + 27b^2}{15b^2 - 29ab - 14a^2}$.

Rješenje.
Uputa: naravno, brojnike i nazivnike svakog od razlomaka potrebno je faktorizirati. Za faktorizaciju kod prva dva razlomka koristite formule (4), (6) i (2), a kod trećeg razlomka faktorizirajte kvadratne trinome kao u zadatku 5.

Zadatak 24.
Izračunajte:

$$\left(2013 - \sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2014 \cdot 2012}}\right)^2.$$

Rješenje.
Izraz je jednak 1. Uputa: uvedite supstituciju $x = 2012$ pa sredite dobiveni izraz.

Zadatak 25.
Korijen umnoška četiri uzastopna prirodna broja uvećanog za 1 je prirodan broj. Dokažite.