Dirichletov princip

1.11.2015.

Uvod/teorijske osnove

Dirichletov princip je pravilo koje kaže da ako $nk+1$ kuglicu stavimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalazi barem $k+1$ kuglica.

Dokaz. Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je u svakoj kutiji najviše k kuglica, onda je u svim kutijama zajedno najviše nk kuglica, što je nemoguće jer kuglica ima više od toga.

Primjer 1.
Dokažite da u skupini od 5 ljudi postoje barem dvije osobe koje su rođene u isto godišnje doba.

Rješenje.
Uočimo da u ovom primjeru "kuglice" predstavljaju ljudi, a "kutije" godišnja doba, te da je $n = 4$ i $k = 1$. Tvrdnja sada direktno slijedi iz Dirichletovog teorema.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Dokažite da u grupi od 37 ljudi postoje barem 4 osobe istog horoskopskog znaka.

Rješenje.
Uputa: "kuglice" su ljudi, a "kutije" su horoskopski znakovi. Koliki je n, a koliki k u ovom primjeru?

Zadatak 2.
Dokažite da među bilo kojih 6 ljudi postoje 3 osobe koje se sve ili međusobno poznaju, ili ne poznaju. Napomena: poznanstva su uzajamna.

Zadatak 3.
U ladici se nalazi 10 crvenih i 10 plavih čarapa. Ivica na slijepo izvlači čarape. Koliko najmanje čarapa treba uzeti da bi bio siguran da ima jednobojan par?

Zadatak 4.
Svaka točka ravnine obojana je jednom od 3 boje. Dokažite da postoji dužina duljine 1 kojoj su krajevi iste boje.

Zadatak 5.
Na zabavi se nalazi 10000 ljudi. U nekom trenutku neke su se osobe počele rukovati. Dokažite da postoje dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

Zadatak 6.
Unutar kvadrata duljine stranice 1 nalazi se pet obojanih točaka. Dokažite da postoje 2 od tih 5 točaka takve da je udaljenost među njima manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zadatak 7.
Mali Kristijan izrazito ne voli komarce, ali kako je ljeto, sve je puno komaraca te je smislio način za njihovo istrjebljenje. Na ploču 1 m $\times$ 1 m postavio je primamljivu tvar koja privlači komarce, te kada komarci dođu blizu ploče, on ih zgnječi mlatilicom promjera 3.6 cm. Ako se u jednom trenutku nad pločom nalazi 10001 komarac, dokažite da ih barem 26 može zgnječiti jednim udarcem.

Zadatak 8.
U ravnini su sve točke obojane jednom od dvije boje. Dokažite da postoji pravokutnik kojemu su sva 4 vrha obojana istom bojom.

Zadatak 9.
U ravnini je dano 2015 točaka. Dokažite da među svim udaljenostima po dvije od tih točaka postoje barem 32 različite.

Zadatak 10.
U pravokutnom koordinatnom sustavu odabrano je 5 točaka s cjelobrojnim koordinatama. Dokažite da među njima postoje dvije takve da polovište dužine koja ih spaja ima cjelobrojne koordinate.

Zadatak 11.
Odabrano je 25 točaka u ravnini tako da za bilo koje 3 vijedi da su 2 od te 3 udaljene manje od 1. Dokažite da postoji kružnica radijusa 1 koja sadrži barem 13 od tih 25 točaka.

Zadatak 12.
Sedamnaestero učenika međusobno razgovara o tri teme. Svaka dva učenika međusobno razgovaraju samo o jednoj temi. Dokažite da postoji troje učenika koji su međusobno razgovarali o istoj temi.

Rješenje.
Uputa: pogledajte zadatak 2.

Zadatak 13.
Neki broj točaka u ravnini međusobno je povezan s n boja. (Svake dvije točke povezane su samo jednom bojom.) Za koji najmanji broj točaka postoji jednobojan trokut?

Zadatak 14.
Matko je na ploču napisao 21 različit prirodan broj od 1 do 100, uključivo. Dokažite da među njima postoje dva para čiji je zbroj isti.

Zadatak 15.
U tablici 10×10 susjednim se poljima smatraju polja koja dijele barem jedan zajednički vrh. U svako polje upisan je prirodni broj manji ili jednak 10 tako da su brojevi u svaka dva susjedna polja relativno prosti. Dokažite da postoji broj koji je u tablicu upisan barem 17 puta.

Zadatak 16.
Neki šahist odlučio se 77 dana spremati za turnir. Svaki dan želi igrati barem jednu partiju, ali da ih ukupno ne odigra više od 132. Dokažite da postoji niz od nekoliko uzastopnih dana u kojima će šahist ukupno odigrati točno 21 partiju.

Zadatak 17.
Neka je n prirodni broj veći od 5. Dano je n točaka u ravnini tako da udaljenosti nikoja dva para nisu jednake. Svaka točka spojena je s najbližim susjedom. Dokažite da ne postoji točka spojena s više od 5 drugih točaka.

Zadatak 18.
Neka je $a_1, a_2, ...a_{n^2+1}$ niz od n^2+1 realnih brojeva. Dokažite da u tom nizu postoji rastući ili padajući podniz koji ima $n+1$ član.

Rješenja ostalih zadataka

Rješenje zadatka 2. Prvo ćemo pretpostaviti da ne postoje takve tri osobe.

Vizualizirajmo dane osobe kao točke u ravnini, a (ne)poznanstva među njima kao dužine koje spajaju te točke. Ukoliko crvene dužine predstavljaju poznanstva, a plave nepoznanstva, tvrdnja zadatka je ekvivalentna tome da postoji jednobojan trokut. Fiksirajmo jednu točku (osobu) i promatrajmo dužine koje izlaze iz nje. Tih dužina ima 5 pa su barem 3 iste boje. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je ta boja crvena. Sada gledamo te tri točke na drugim krajevima tih dužina. One međusobno ne smiju biti povezane crvenim dužinama jer smo onda odmah dobili crveni trokut što je suprotno našoj pretpostavci, pa su stoga sve međusobno povezane plavim dužinama, što čini plavi trokut. Zato postoje tri osobe koje se sve međusobno (ne)poznaju. Ova tvrdnja je u suprotnosti s našom pretpostavkom pa to znači da nam je pretpostavka bila kriva, tj. da postoje tri osobe koje se sve međusobno (ne)poznaju.

Rješenje zadatka 4. Prvo pretpostavimo da ne postoji tražena dužina. Uzmimo proizvoljne dvije točke (A i C) koje su udaljene za $\sqrt{3}$ te konstruirajmo romb $ABCD$ stranica duljine 1. Sada vrijedi $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |BD| = 1$. Zbog naše pretpostavke točke B i D su međusobno različite boje, a točke A i C su svaka različite boje i od B, i od D. Odavde zaključujemo da su A i C iste boje. Budući da su A i C bile proizvoljne točke udaljene za $\sqrt{3}$ i zaključili smo da su iste boje, vrijedi da su svake dvije točke udaljene za $\sqrt{3}$ iste boje. Uzmimo sada neki trokut $\triangle MNO$ takav da $|MO| = \sqrt{3}$, $|NO| = \sqrt{3}$ i $|MN| = 1$. Dobivamo da su M i O iste boje te da su N i O iste boje pa imamo da su M i N iste boje i udaljene za 1, što je kontradikcija s našom pretpostavkom. Dakle, zaključujemo da je pretpostavka bila kriva i da postoji dužina s traženim svojstvom.

Rješenje zadatka 5. Počinjemo tako da pretpostavimo da tvrdnja zadatka ne vrijedi. Onda se nijedne dvije osobe nisu rukovale s istim brojem ljudi. Budući da se osoba ne može rukovati sama sa sobom, može se rukovati s najviše 9999 ljudi, a najmanje s 0. To znači da ukupno ima 10000 različitih ljudi s kojima se neka osoba mogla rukovati, a kako se 10000 osoba rukovalo, slijedi da za svaki broj od 0 do 9999 postoji osoba koja se rukovala s tim brojem ljudi. To znači da postoji osoba koja se nije rukovala ni s kim i osoba koja se rukovala sa svima, a to je nemoguće jer se nije mogla rukovati s osobom koja se nije rukovala ni s kim.

Rješenje zadatka 6. Podijelimo dani kvadrat na 4 jednaka kvadrata dimenzija $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Sada znamo da se unutar barem jednog od tih kvadrata nalaze barem dvije točke. Ako promatramo taj manji kvadrat i te dvije točke unutar njega, možemo primijetiti da se 3 vrha manjeg kvadrata nalaze na rubu velikog kvadrata pa se te dvije točke ne mogu nalaziti u dva nasuprotna vrha manjeg kvadrata. Stoga je udaljenost te dvije točke strogo manja od duljine dijagonale manjeg kvadrata koja iznosi $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rješenje zadatka 7. Ideja zadatka je podijeliti primamljivu površinu na neki broj sukladnih manjih površina koje možemo prekriti cijelom mlatilicom. Ako to uspijemo, onda Dirichletovim principom možemo odrediti da postoji manja površina nad kojom se nalazi neki željeni broj komaraca. U ovakvim su zadatcima zadani brojevi u zadatku najčešće velika pomoć u određivanju koliko nam manjih površina treba. Kada pogledamo gornji iskaz Dirichletovog principa i zamijenimo nepoznanice brojevima iz zadatka, dobivamo $1001 = nk + 1$ te $k + 1 = 26$, tj. dobivamo da je željeni broj manjih površina 400. Budući da želimo da budu jednake, svaka je površine 25 cm^2. Sada bi bilo zgodno da naša mlatilica pokriva kvadrat površine 25 cm^2. Budući da najveći kvadrat koji se može upisati u kružnicu radijusa r ima stranicu duljine $r\sqrt{2}$, slijedi da mlatilica može pokriti traženu površinu. Budući da mlatilica može pokriti površinu dimenzija 5 cm $\times$ 5 cm, a na podlozi se nalazi 400 takvih površina, postoji takva manja površina nad kojom se nalazi 26 komaraca.

Rješenje zadatka 8. Uzmimo 9 paralelnih pravaca te ih presijecimo s 3 pravca okomita na njih. Sada gledamo boje triju točaka na svakom od 9 paralelnih pravaca. Postoji osam različitih konfiguracija boja tih triju točaka pa stoga postoje 2 pravca na kojima se nalaze točke u istoj konfiguraciji boja. Na svakom od ta dva pravca barem su dvije od te tri točke iste boje te su međusobno odgovarajuće onima na drugom pravcu, a odavde slijedi da čine pravokutnik s istobojnim vrhovima.

Rješenje zadatka 9. Hint. Pretpostavimo da ne postoje 32 različite udaljenosti, tj. da postoji najviše 31 različita udaljenost među tim točkama. Nakon toga fiksirajmo 2 točke te gledajmo udaljenosti od te dvije točke.

Sada rješenje... Prvo pogledajte hint ako niste.

Označimo 31 različitu udaljenost sa $r_1, r_2, ..., r_{31}$. Sada promatrajmo 62 kružnice radijusa $r_1, ..., r_{31}$ sa središtima u dvije fiksirane točke. Preostale točke nalaze se na sjecištima tih kružnica. Sjeći se mogu samo kružnice različitih središta, a tih sjecišta ima najviše $2 \cdot 31^2$. Zato i točaka koje nisu ove dvije fiksirane ima najviše toliko. Dakle, ukupno ima najviše $2 \cdot 31^2 + 2$ točaka, što je manje od danog broja točaka u zadatku, pa je to nemoguće. Zaključujemo da je pretpostavka bila kriva, odnosno da postoje barem 32 različite udaljenosti.

Rješenje zadatka 10. Ako dvije točke imaju koordinate (a, b) i (c, d), onda polovište dužine koja ih spaja ima koordinate $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$. Stoga zaključujemo da polovište dužine koja spaja dvije točke cjelobrojnih koordinata ima cjelobrojne koordinate ako i samo ako su odgovarajuće koordinate tih dviju točaka jednake parnosti. Budući da različitih kombinacija parnosti koordinata točaka ima 4, među ovih 5 točaka postoje dvije jednakih kombinacija parnosti pa je i polovište dužine koja ih spaja točka cjelobrojnih koordinata.

Rješenje zadatka 11. Prvi slučaj: Ne postoje dvije točke čija je međusobna udaljenost veća ili jednaka 1. Sada možemo fiksirati jednu točku, pa budući da znamo da su sve druge točke od nje udaljene za manje od 1, sve se nalaze unutar kružnice radijusa 1 sa središtem u fiksiranoj točki.

Drugi slučaj: Postoje dvije točke čija je međusobna udaljenost veća ili jednaka 1. Fiksirajmo te dvije točke i promatrajmo kružnice radijusa 1 kojima su te dvije točke središta. Sada se zbog uvjeta zadatka svaka od preostale 23 točke nalazi u barem jednoj od tih kružnica. Stoga se u jednoj od njih nalazi barem 12 od preostalih točaka pa to sa središtem čini ukupno 13 točaka.

Rješenje zadatka 12. Hint. Pogledaj rješenje zadatka 2

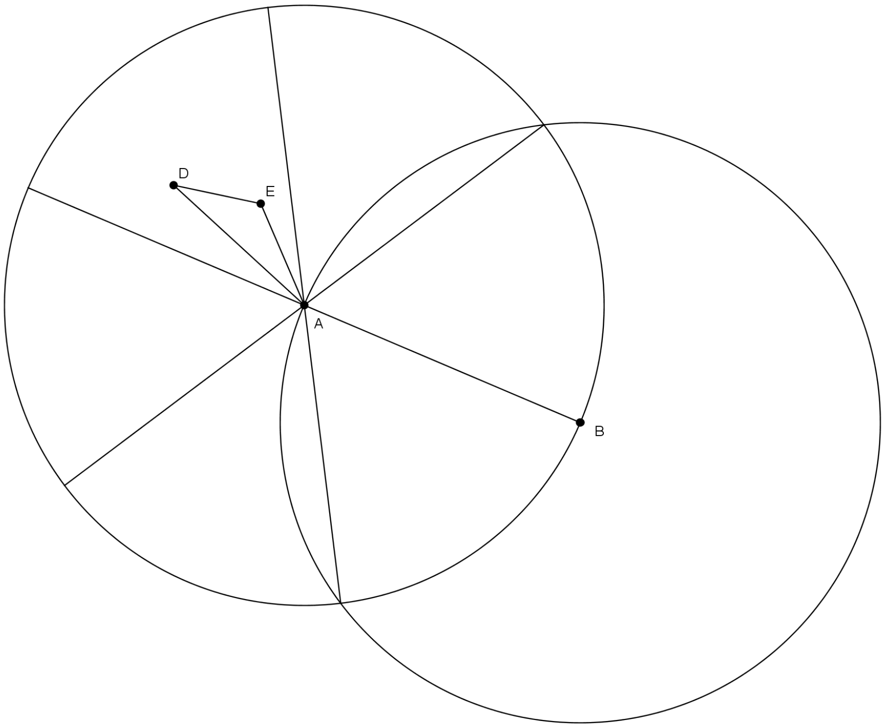
Rješenje zadatka 13. Ovo je poopćenje zadataka 12 i 2. Probajte naći vezu između rješenja za n i $n + 1$ boju te onda formulu dokazati matematičkom indukcijom.

Rješenje zadatka 14. Najveći i najmanji mogući zbrojevi dvaju različitih prirodnih brojeva od 1 do 100 su 199 i 3 pa stoga postoji 197 različitih zbrojeva. Među 21 odabranim brojem postoji 210 parova različitih brojeva pa postoje dva različita para čiji je zbroj isti.

Rješenje zadatka 15. Podijelimo danu tablicu na 25 2×2 kvadrata. Sada znamo da u svakom kvadratu smije biti najviše jedan paran broj pa zaključujemo da parnih brojeva ima najviše 25. Slično zaključujemo da se 3 i 9 zajedno pojavljuju najviše 25 puta. Stoga imamo da se 1, 5 i 7 zajedno pojavljuju barem 50 puta, pa po Dirichletovom principu dobivamo da se jedan od njih pojavljuje barem 17 puta.

Rješenje zadatka 16. Promatramo brojeve $a_1, a_2, ..., a_{77}$, gdje a_j označava ukupan broj odigranih partija zaključno s j-tim danom. Stoga vrijedi $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{77} \leqslant 132$. Da bismo dokazali traženu tvrdnju, dovoljno je dokazati da je jedan od brojeva $a_1, a_2, ..., a_{77}$ jednak jednom od brojeva $a_1 + 21, a_2 + 21, ..., a_{77} + 21$, jer ako je to slučaj, tj. za neke i i j vrijedi $a_i + 21 = a_j$, onda vrijedi da je $j > i$ te da se u danima $i+1, i+2, ..., j$ zajedno odigrala točno 21 partija. Brojevi $a_1, a_1 + 21, a_2, a_2 + 21, ..., a_{77}, a_{77} + 21$ nalaze se između 1 i 153 uključivo pa su onda barem dva od tih 154 brojeva jednaka. Nemoguće je da su to dva broja oblika a_i i a_j niti da su to dva broja oblika $a_i + 21$ i $a_j + 21$ jer je niz $a_1, a_2, ..., a_{77}$ rastući, pa su onda ta dva broja oblika $a_i + 21$ i a_j. Iz toga slijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje zadatka 17.



Slika 1: slika uz rješenje zadatka 17.

Prvo pretpostavimo da postoji točka koja je povezana s više od 5 drugih točaka, odnosno s barem 6 točaka. Fiksirajmo tu točku i gledajmo preostalih 5 točaka kao na slici 1. Fiksiranu točku nazovimo A te od nje najudaljeniju od promatranih 6 nazovimo B. Nacrtajmo sada kružnicu središta A takvu da B leži na njoj. Jasno je da je preostalih 5 promatranih točaka unutar te kružnice. Podijelimo kružnicu na 6 jednakih kružnih isječaka kao na slici 1. Budući da znamo da B nije točka najbliža A, a one su povezane, zaključujemo da je A točka najbliža B. Stoga se niti jedna od preostalih 5 točaka ne nalazi u dva kružna isječka oko B, nego je svih 5 u preostala 4 isječka pa se u nekom isječku nalaze barem dvije točke. Nazovimo ih D i E. Kut $\angle DAE$ nije veći od $60°$ pa je najveći kut u trokutu $\triangle ADE$ veći od $\angle DAE$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je to kut $\angle EDA$. Sada znamo da je $|EA| > |DA|$ pa onda E nije točka najbliža A, no A i E su povezane pa je A točka najbliža E. No, to nije moguće jer je $\overline{AE}$ najdulja stranica u trokutu $\triangle ADE$ zbog toga što je kut pri D najveći kut toga trokuta. Sada smo došli do kontradikcije pa zaključujemo da je početna pretpostavka bila kriva, odnosno da ne postoji točka koja je povezana s više od 5 točaka.

Rješenje zadatka 18. Pretpostavimo da ne postoji $(n+1)$-člani rastući podniz danog niza, pa dokažimo da postoji padajući niz koji ima $(n+1)$ člano. Definirajmo p_k kao duljinu najduljeg rastućeg podniza danog niza koji počinje s a_k, gdje je $k \in \{1, 2, ..., n^2+1\}$. Dakle, vrijedi $1 \leqslant p_k \leqslant n, \forall k \in \{1, 2, ..., n^2+1\}$. Dirichletovim principom dobivamo da postoji barem $n+1$ članova niza $p_1, p_2, ..., p_{n^2+1}$ koji su jednaki, nazovimo ih $p_{k_1}, p_{k_2}, ..., p_{k_{n+1}}$, gdje je $1 \leqslant k_1 < k_2 < ... < k_{n+1} \leqslant n^2+1$. Ako za neki $i \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi da je $a_{k_i} < a_{k_{i+1}}$, onda imamo da je

$$p_{k_i} > p_{k_{i+1}}, \tag{1}$$

što je nemoguće. Sada dobivamo da je $a_{k_i} \geqslant a_{ki+1}$ za sve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ pa $a_{k_1}, a_{k_2}, ..., a_{k_{n+1}}$ čine padajući podniz početnog niza duljine $n+1$.
(1) vrijedi zato što ako postoji rastući niz koji počinje s $a_{k_{i+1}}$, onda da tom nizu na početak dodamo a_{k_i}, dobivamo rastući niz koji počinje s a_{k_i} i dulji je od prethodnog niza.