Sukladnost i sličnost

8. 11. 2015.

Uvod/teorijske osnove

Pojmovi sukladnosti i sličnosti trokuta u redovnoj se nastavi matematike pojavljuju već u osnovnoj školi. Iako tvrdnje vezane uz ove pojmove izgledaju očito i jasno, one su koristan alat u brojnim geometrijskim situacijama. Upravo zbog posljednje navedenog razloga, ovaj će se članak baviti primjenom sukladnosti i sličnosti na zadatke natjecateljskog tipa.
Promotrimo za početak kriterije koji nam pomažu odrediti kada su dva trokuta sukladna.

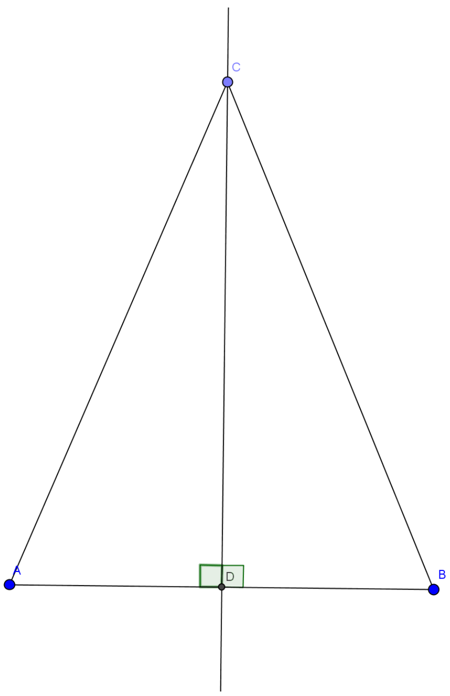
Poučak 1 (Sukladnost trokuta)**.** *Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u:*

- *dvjema stranicama i kutu među njima (**SKS poučak**)*
- *jednoj stranici i dvama kutevima uz nju (**KSK poučak**)*
- *svima trima stranicama (**SSS poučak**)*
- *dvjema stranicama i kutu nasuprot većoj od njih (**SSK poučak**)*

Tvrdnju da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sukladni zapisujemo $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, pri čemu je $\cong$ oznaka sukladnosti.

Sukladnost trokuta koristi se u dokazivanju nekih osnovnih činjenica u geometriji.

Poučak 2 (Svojstvo simetrale dužine)**.** *Svaka je točka simetrale dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine.*
Napomena: Simetrala dužine je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.

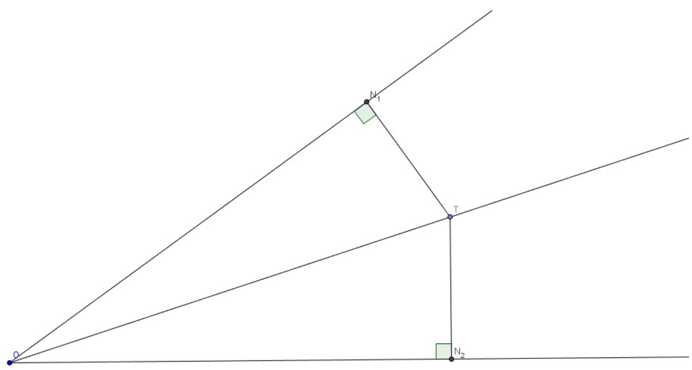


Slika 1:

Dokaz. Primijenit ćemo SKS poučak o sukladnosti trokuta. Neka je točka C proizvoljna točka na simetrali dužine $\overline{AB}$ i D polovište od $\overline{AB}$ (vidi sliku 1). U slučaju da se C nalazi na dužini $\overline{AB}$ tvrdnja očito vrijedi. U suprotnom, trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$ su sukladni prema teoremu SKS jer im je stranica $\overline{CD}$ zajednička, $|AD| = |BD|$ i $\angle ADC = \angle BDC = 90°$. Slijedi $|AC| = |BC|$.

Poučak 3 (Svojstvo simetrale kuta)**.** *Svaka je točka na simetrali kuta (manjega od* $180°$*) jednako udaljena od krakova tog kuta.*

Napomena: Pod udaljenosti točke i pravca podrazumijevamo udaljenost točke i nožišta okomice iz točke na taj pravac.

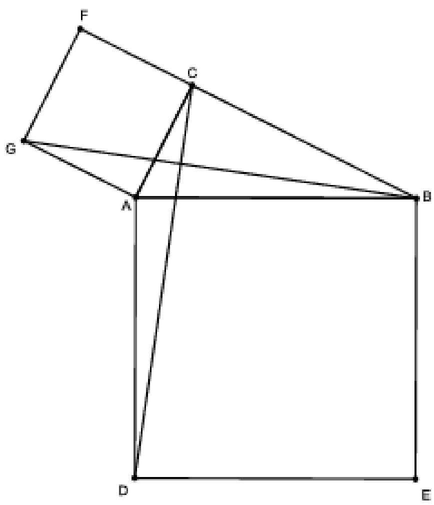


Slika 2:

Dokaz. Neka T leži na simetrali kuta s vrhom u O. Iz T spustimo okomice na krakove kuta. Označimo s N_1 i N_2 nožišta tih okomica. Trokuti $\triangle TON_1$ i TON_2 su sukladni prema KSK teoremu (naime, $\overline{OT}$ im je zajednička stranica, $\angle TON_1 = \angle TON_2$ i $\angle TN_1O = \angle TN_2O = 90°$). Slijedi $|TN_1| = |TN_2|$.

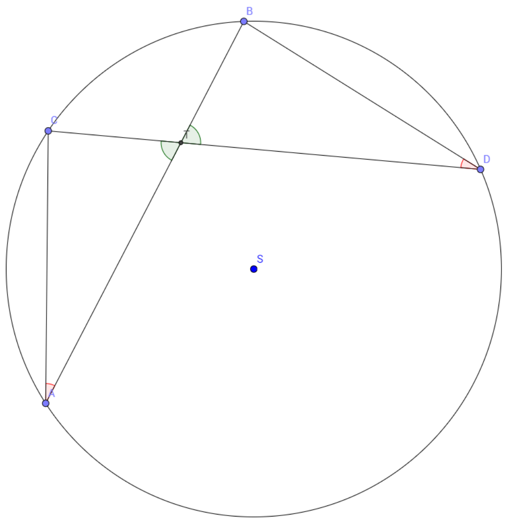
Dokažite i obrate poučaka 2 i 3.

Primjer 1. *Nad katetom* $\overline{AC}$ *i hipotenuzom* $\overline{AB}$ *pravokutnog trokuta* $\triangle ABC$ *konstruirani su kvadrati* $\square ADEB$ *i* $\square ACFG$*. Dokaži da je* $|CD| = |BG|$*.*



Slika 3:

Rješenje. Vrijedi $\triangle ABG \cong \triangle ADC$ zbog $|AG| = |AC|$, $|AB| = |AD|$ i $\measuredangle DAC = \measuredangle GAB = 90° + \measuredangle BAC$, pa tvrdnja zadatka očito vrijedi.



Slika 4:

Proširimo sada naš popis alata i kriterijima za sličnost trokuta.

Poučak 4 (Sličnost trokuta)**.** *Dva su trokuta slična ako:*

- *im je jedan par stranica proporcionalan i kutevi što ih zatvaraju ti parovi međusobno jednaki (**SKS poučak**)*
- *su dva kuta jednog trokuta jednaka odgovarajućim kutevima drugog trokuta (**KK poučak**)*
- *su im odgovarajuće stranice proporcionalne (**SSS poučak**)*

Tvrdnju da su trokuti $\triangle DEF$ i $\triangle D_1E_1F_1$ slični zapisujemo $\triangle DEF \sim \triangle D_1E_1F_1$, pri čemu je $\sim$ oznaka sličnosti. Omjer odgovarajućih stranica dvaju sličnih trokuta jest stalan (za te trokute) i naziva se koeficijentom sličnosti.

Primjer 2 (Potencija točke)**.** *Neka je T točka unutar kružnice k i neka se tetive te kružnice, $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, sijeku u T. Tada vrijedi*

$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|.$$

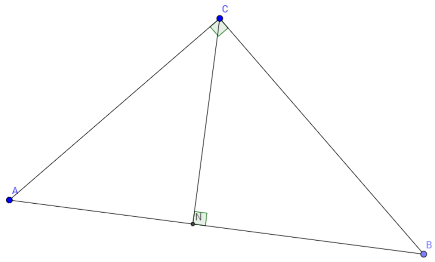
Umnošci s lijeve i desne strane jednakosti nazivaju se potencijom točke T u odnosu na kružnicu k.

Rješenje. Kako je $\angle CTA = \angle DTB$ (vršni kutovi) i $\angle CAT = \angle CAB = \angle CDB = \angle TDB$ (obodni kutovi nad $\widehat{BC}$, prisjetimo se da su obodni kutevi nad istim kružnim lukom međusobno jednaki), tako su trokuti $\triangle ATC$ i $\triangle DTB$ slični prema KKK teoremu o sličnosti. Slijedi $\dfrac{|TA|}{|TC|} = \dfrac{|TD|}{|TB|}$ i odatle $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$. (vidi Sliku 4.)

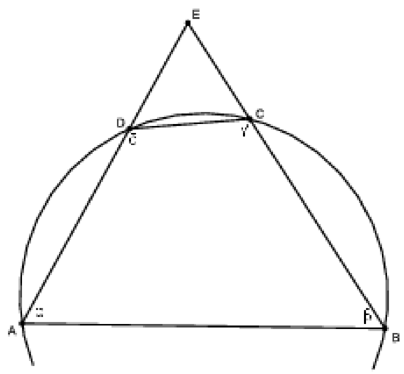
Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Ako se u nekom četverokutu dijagonale raspolavljaju, taj je četverokut paralelogram. Dokažite ovu tvrdnju.

Rješenje.
Neka u četverokutu $ABCD$ za sjecište dijagonala S vrijedi $|AS| = |CS|$ i $|DS| = |BS|$. Uočimo da je $\triangle ASD \cong \triangle CSB$ prema KSK teoremu jer je $|AS| = |CS|$, $|DS| = |BS|$ i $\angle ASD = \angle BSC$. Slijedi $\angle DAS = \angle BCS$ i $\angle ADS = \angle CBS$. Uočimo i da je $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ prema SKS teoremu jer je $|AS| = |CS|, |BS| = |DS|$ i $\angle ASB = \angle CSD$. Slijedi $\angle SAB = \angle SCD$ i $\angle SBA = \angle SDC$. Sada je $\angle DAB = \angle DAS + \angle SAB = \angle BCS + \angle SCD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle SBA + \angle CBS = \angle SDC + \angle ADS = \angle ADC$. Sada iz $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360°$ slijedi $\angle DAB + \angle ABC = 180°$. Pretpostavimo sada da pravci AD i BC nisu paralelni te da se sijeku u točki E koja leži s iste strane pravca AB kao i



Slika 5:



Slika 6:

točke C i D. Tada su $\angle DAB$ i $\angle ABC$ dva kuta $\triangle ABE$, a zbroj im je 180°. Kontradikcija. Ako točka E leži sa suprotne strane pravca AB u odnosu na točke C i D, promatramo kuteve $\angle BCD$ i $\angle CDA$ u $\triangle CDE$. Dakle, $AD \parallel BC$. Analogno se dokazuje i $AB \parallel CD$.

Zadatak 2.
Ako su p i q duljine odsječaka što ih visina duljine v čini na hipotenuzi pravokutnog trokuta, tada vrijedi

$$v = \sqrt{pq}.$$

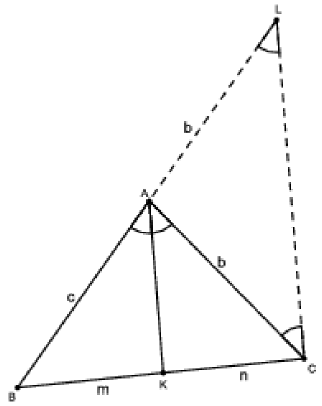
Rješenje.
Prema oznakama na Slici 5 vrijedi $\triangle ANC \sim \triangle CNB$ (objasni zašto). Odatle slijedi:

$$\frac{|AN|}{|CN|} = \frac{|CN|}{|NB|},$$

$$v^2 = pq,$$

odakle direktno slijedi tvrdnja zadatka. Također vrijedi $a = \sqrt{qc}$, $b = \sqrt{pc}$ (dokažite i pomoću tih tvrdnji izvedite Pitagorin poučak).

Zadatak 3.
Neka su A, B, C, D četiri različite točke na kružnici i neka se pravci BC i DA sijeku u točki E. Dokaži da su trokuti $\triangle ABE$ i $\triangle CDE$ slični.
Uputa: Koristite činjenicu da u četverokutu kojemu se može opisati kružnica vrijedi da je zbroj naspurotnih kuteva jednak 180°



Slika 7:

Rješenje.
Vrijedi $\measuredangle EDC = 180° - \delta = \beta$, $\measuredangle ECD = 180° - \gamma = \alpha$ (Zašto?), pa prema KK poučku vrijedi tvrdnja zadatka (Slika 6). Uočimo sad da zbog toga vrijedi

$$|AE| \cdot |DE| = |BE| \cdot |CE|,$$

što je zapravo također poučak o potenciji točke (lijeva i desna strana su potencije točke točke E u odnosu na opisanu kružnicu četverokuta $\square ABCD$). Dakle, poučak o potenciji točke vrijedi i za točke izvan kružnice.

Zadatak 4.

(**Srednjica trokuta**) Srednjica trokuta jest spojnica polovišta dvije stranice u trokutu. Srednjica trokuta paralelna je s trećom stranicom i jednaka polovini njene duljine. Dokažite ovu tvrdnju.

Zadatak 5.

(**Svojstvo simetrale kuta u trokutu**) Ako u trokutu $\triangle ABC$ simetrala kuta $\measuredangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki K, tada vrijedi

$$|BK| : |KC| = |BA| : |AC|.$$

Rješenje.
Uvedimo oznake kao na Slici 7. Povucimo paralelu s pravcem AK kroz točku C; ta paralela siječe pravac AB u točki L. Tada zbog jednakosti kuteva uz presječnicu slijedi $\measuredangle ACL = \measuredangle CAK = \measuredangle KAB = \measuredangle ALC$, pa je trokut $\triangle CAL$ jednakokračan, tj. $|AL| = b$. s druge strane, zbog $AK \parallel CL$ slijedi $\triangle KBA \sim \triangle CBL$, tj.

$$\frac{|BK|}{|BC|} = \frac{|BA|}{|BL|},$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{c}{c+b},$$

$$mc + mb = mc + nc,$$

$$m : n = c : b.$$

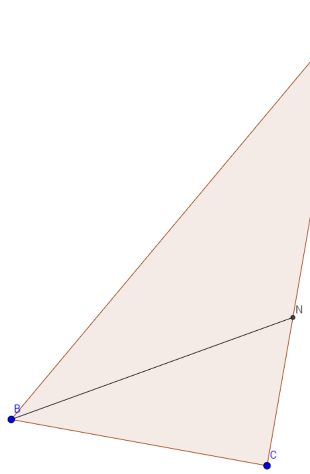
Zadatak 6.

Kolike su stranice jednakokračnog trokuta kojemu je visina na osnovicu v, a polumjer upisane kružnice ρ?

Rješenje.
Stranica ima duljinu $\dfrac{v \cdot (v - \rho)}{\sqrt{v^2 - 2 \cdot \rho \cdot v}}$, a osnovica duljinu $\dfrac{2 \cdot \rho \cdot v}{\sqrt{v^2 - 2 \cdot \rho \cdot v}}$.

Zadatak 7.

(**Bonerov poučak**) U svakom trokutu $\triangle ABC$ u kojem je $\beta = 2\alpha$ vrijedi $b^2 = a^2 + ca$. Dokažite ovu tvrdnju.



Slika 8:

Rješenje.
Povucimo simetralu kuta $\angle ABC$ i označimo s N točku u kojoj ona siječe $\overline{AC}$ (Slika 8). Ukoliko s α označimo $\angle CAB$, lako se uočava da je $\angle CNB = 2 \cdot \alpha = \angle CBA$ (posljednja jednakost slijedi iz uvjeta zadatka). Ujedno je zbog svojstva simetrale kuta: $\angle CBN = \angle NBA$. Slijedi: $\triangle CNB \sim \triangle CBA$. Stavljanjem u omjere odgovarajuće stranice dobivamo:

$$\frac{a}{|CN|} = \frac{b}{a},$$

tj.

$$a^2 = b \cdot |CN|. \tag{1}$$

Ujedno iz Zadatka 5 znamo da je $\frac{|CN|}{|NA|} = \frac{a}{c}$. Ujedno je i $|CN| + |NA| = b$. Rješavanjem po $|CN|$ slijedi: $|CN| = \frac{ab}{a+c}$. Uvrštavanjem u (1) slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 8.
Osnovica jednakokračnog trokuta ima duljinu a, a krak duljinu b. Simetrale kutova na osnovici sijeku krakove u točkama P i Q. Dokaži da vrijedi

$$|PQ| = \frac{ab}{a+b}.$$

Zadatak 9.
Neka je $\triangle ABC$ jednakokračan pravokutni trokut, D polovište katete $\overline{BC}$ i E točka u kojoj simetrala kuta $\measuredangle ADC$ siječe katetu $\overline{AC}$. Označimo s F nožište okomice spuštene iz E na AD. Dokažite da je $|AF| = 2|CE|$.

Zadatak 10.
U trokutu $\triangle ABC$ povučene su simetrala kuta $\overline{AS}$ i težišnica $\overline{AT}$. Kružnica opisana trokutu $\triangle AST$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Dokažite da je $|BD| = |CE|$.
Napomena: Težišnica je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem njemu nasuprotne stranice.

Rješenje.
Uputa: Koristiti potenciju točke s obzirom na kružnicu opisanu četverokutu $ASTD$.