MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Matematička indukcija

15.11.2015.

Matematička indukcija je vrlo korisna i česta metoda dokazivanja koja se tipično koristi za dokazivanje raznoraznih svojstava prirodnih brojeva.

Princip matematičke indukcije

i) *Baza indukcije.*
Tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za $n = 1$.

ii) *Pretpostavka indukcije.*
Pretpostavljamo da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.

iii) *Korak indukcije.*
Ako iz pretpostavke indukcije slijedi da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi i za broj $k+1$, onda navedena tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

Pogledajmo na primjeru kako se provodi dokaz matematičkom indukcijom.

Primjer 1.
Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po broju n.

i) *Baza.*
Trebamo dokazati da navedena jednakost vrijedi za broj $n = 1$. Lijeva strana jednakosti zapravo predstavlja zbroj svih brojeva od 1 do n pa je u ovom slučaju jednaka 1, dok je desna strana jednaka

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

Dakle, imamo jednakost $1 = 1$ koja očito vrijedi, pa je baza dokazana.

ii) *Pretpostavka.*
Pretpostavimo da jednakost

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.

iii) *Korak.*
Trebamo dokazati da jednakost vrijedi i za $k+1$, odnosno da vrijedi

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Lijevu stranu možemo raspisati koristeći pretpostavku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) &= \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + k}_{\text{prema pretpostavci}=\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Ovime je korak indukcije dokazan, pa tvrdnja zadatka vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Ako vam ovaj dokaz djeluje zbunjujuće ili nejasno, pogledajte sljedeći slikoviti "primjer" koji dočarava princip matematičke indukcije.

Primjer 2.
Posložili smo domino pločice u red i želimo provjeriti možemo li ih sve srušiti.
Prvo ćemo provjeriti možemo li srušiti prvu pločicu u redu. Pretpostavimo sad da će se srušiti neka pločica u redu. Ako njezino rušenje znači da će se srušiti i iduća pločica u redu, onda će se srušiti sve domino pločice.
Zašto? Uspjeli smo srušiti prvu pločicu. To znači da će se srušiti druga pločica; naime, znamo da rušenje jedne pločice u nizu uzrokuje rušenje iduće. Analogno zaključujemo kako će se srušiti i treća pločica, a onda i četvrta, i peta i tako sve pločice zaredom. Zaista, srušit će se sve pločice u redu.
Odredite u ovom primjeru "bazu", "pretpostavku" i "korak".

Osim jednakosti, matematičkom indukcijom možemo dokazivati i nejednakosti - pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 3.
Dokažite sljedeću nejednakost
$$n < 2^n, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

i) *Baza.*
Za $n = 1$ imamo nejednakost $1 < 2^1$ koja očito vrijedi.

ii) *Pretpostavka.*
Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi nejednakost
$$k < 2^k,$$
odnosno $2^k > k$.

iii) *Korak.*
Trebamo dokazati nejednakost za $k+1$, tj. da je
$$2^{k+1} > k+1$$
Vrijedi
$$2^{k+1} = \underbrace{2 \cdot 2^k > 2k}_{\text{pretpostavka}}.$$
Sada još samo trebamo provjeriti vrijedi li nejednakost $2k \geqslant k+1$. No to je očito istina jer je k prirodan broj:
$$2k \geqslant k+1 \Leftrightarrow k \geqslant 1.$$
Dakle, vrijedi produžena nejednakost
$$2^{k+1} > 2k \geqslant k+1$$
, pa vrijedi i korak indukcije $2^{k+1} > k+1$. Time je tvrdnja zadatka dokazana.

Dokaze matematičkom indukcijom možemo koristiti i kod dokazivanja tvrdnji koje vrijede za sve prirodne brojeve koji su veći ili jednaki n_0, gdje je n_0 neki prirodni broj. Tada se princip matematičke indukcije može izreći ovako:

Generalizirani princip matematičke indukcije

i) *Baza indukcije.*
Tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za $n = n_0$.

ii) *Pretpostavka indukcije.*
Pretpostavljamo da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.

iii) *Korak indukcije.*
Ako iz pretpostavke indukcije slijedi da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi i za broj $k+1$, onda navedena tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n \geqslant n_0$.

Uočite da je princip koji smo prije koristili zapravo gornji princip za $n_0 = 1$. Upamtite, baza indukcije je uvijek **najmanji broj** n_0 od svih brojeva na koje se tvrdnja odnosi.
Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 4.
Dokažite nejednakost:
$$3^n > 2^n + 3n, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3.$$

Tvrdnju ćemo dokazati korištenjem prethodno spomenutog principa matematičke indukcije za $n_0 = 3$.

i) *Baza.*
Za $n = 3$ imamo nejednakost $27 > 17$ koja očito vrijedi.

ii) *Pretpostavka.*
Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 3$ takav da vrijedi nejednakost
$$3^k > 2^k + 3k.$$

iii) *Korak.*
Dokazujemo tvrdnju za $k+1$, tj da je
$$3^{k+1} > 2^{k+1} + 3(k+1)$$
Vrijedi
$$\begin{aligned} 3^{k+1} &= 3 \cdot 3^k \\ &> 3\left(2^k + 3k\right) \\ &= 3 \cdot 2^k + 9k \\ &= (2+1) \cdot 2^k + 9k \\ &= 2^{k+1} + 2^k + 3(k+1) + 6k - 3 \\ &= \left(2^{k+1} + 3(k+1)\right) + \left(2^k + 6k - 3\right) \\ &> 2^{k+1} + 3(k+1). \end{aligned}$$
Posljednja nejednakost vrijedi zbog
$$2^k + 6k - 3 \geqslant 2 + 6 - 3 = 5 > 0.$$

Matematičkom indukcijom možemo dokazivati i djeljivost - pritom koristimo oznaku $a \mid b$ koju čitamo "a dijeli b". Ta oznaka označava da je broj b djeljiv brojem a (ne obratno!).

Primjer 5.
Dokažite
$$13 \mid 3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Uočimo: ako vrijedi $a \mid b,\ a, b \in \mathbb{N}$, onda postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $b = ka$.

i) *Baza.*
Za $n_0 = 1$ imamo $3 \cdot 5^2 + 2^4 = 3 \cdot 25 + 16 = 91 = 7 \cdot 13$, pa tvrdnja zadatka u ovom slučaju vrijedi.

ii) *Pretpostavka.*
Preptostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi
$$13 \mid 3^k \cdot 5^{k+1} + 2^{k+3},$$
odnosno da postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je
$$3^k \cdot 5^{k+1} + 2^{k+3} = 13p.$$

iii) *Korak.*
Trebamo dokazati $13 \mid 3^{n+1} \cdot 5^{n+2} + 2^{n+4}$. Vrijedi
$$\begin{aligned} 3^{k+1} \cdot 5^{k+2} + 2^{k+4} &= 3 \cdot 3^k \cdot 5 \cdot 5^{k+1} + 2 \cdot 2^{k+3} \\ &= 15 \cdot 3^k \cdot 5^{k+1} + 2 \cdot 2^{k+3} \\ &= 2 \cdot \left(3^k \cdot 5^{k+1} + 2^{k+3}\right) + 13 \cdot 3^k \cdot 5^{k+1} \\ &= 2 \cdot 13p + 13 \cdot 3^k \cdot 5^{k+1} \\ &= 13 \cdot \left(2p + 3^k \cdot 5^{k+1}\right) \end{aligned}$$

Zadatci

Iako u tekstu zadatka nije napomenuto, očekuje se da sljedeće zadatke riješite matematičkom indukcijom. Naravno, za mnoge od njih postoje i različita rješenja, pa nakon što ih riješite indukcijom, pokušajte smisliti i neko drugo rješenje.

Zadatak 1.
Dokažite da je suma prvih n parnih prirodnih brojeva jednaka $n^2 + n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 2.
Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadatak 3.
Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Zadatak 4.
Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

(a) $3 \mid n^3 + 2n$,
(b) $7 \mid 11^n - 4^n$,
(c) $11 \mid 23^n - 1$,
(d) $17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$,
(e) $8 \mid 11 \cdot 3^n + 3 \cdot 7^n - 6$,
(f) $37 \mid 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$.

Zadatak 5.
Dokažite da vrijede sljedeće nejednakosti:

(a) $2^n > 10n^2$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 10$,
(b) $3^n > n^4$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > 7$,
(c) $n^3 > 3n + 3$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$,
(d) $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \ldots \sqrt{4}}}} < 3$, pri čemu korijena ima $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 6.
Dokažite da je broj dijagonala pravilnog n-terokuta jednak $\frac{n(n-3)}{2}$.

Zadatak 7.
Na šahovskom turniru sudjeluje n igrača i svatko igra protiv svakog točno jednom. Dokažite da je ukupno odigrano $\frac{n(n-1)}{2}$ dvoboja.

Zadatak 8.
Dokažite da se, za proizvoljan prirodni broj n, $2n \times 2n$ ploča može popločati tako da ostane točno jedno prazno mjesto, koristeći samo domine oblika slova L s jednakim krakovima (dakle kao 2×2 kvadrat, samo bez jednog vrha).

Zadatak 9.
Dokažite da je poštanskim markama vrijednosti 3 kn i 5 kn moguće platiti svaku cjelobrojnu poštarinu od 8 kn na više.

Zadatak 10.
Ping-pong loptice možemo složiti u pravilnu trostranu piramidu tako da donji sloj složimo u jednakostranični trokut s n loptica duž stranice, idući sloj u trokut s $n-1$ loptica duž stranice, itd. Dokažite da je za piramidu od n slojeva potrebno $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ loptica.

Rješenja nekih zadataka

Rješenje zadatka 1. Matematičkom indukcijom dokazujemo da je

$$2+4+6+\ldots+2n=n^2+n, \text{ za svaki } n\in\mathbb{N}$$

i) *Baza.*
Za $n=1$ imamo jednakost $2=1^2+1=2$, koja očito vrijedi.

ii) *Pretpostavka.*
Pretpostavimo da jednakost

$$2+4+6+\ldots+2k=k^2+k$$

vrijedi za neki $k\in\mathbb{N}$.

iii) *Korak.*
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$:

$$\begin{aligned}2+4+6+\ldots+2(k+1)&=\overbrace{2+4+6+8+\ldots+2k}^{=k^2+k}+2(k+1)\\&=k^2+k+2k+2\\&=(k^2+2k+1)+(k+1)\\&=(k+1)^2+(k+1).\end{aligned}$$

Korak indukcije je dokazan, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje zadatka 2. Matematičkom indukcijom dokazujemo da je

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i) *Baza.*
Za $n=1$ imamo jednakost $1=\frac{1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$ koja očito vrijedi.

ii) *Pretpostavka.*
Pretpostavimo da jednakost

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

vrijedi za neki $k\in\mathbb{N}$.

iii) *Korak.*
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2&=\overbrace{1^2+2^2+\ldots+k^2}^{=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}+(k+1)^2\\&=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}\\&=\frac{(k+1)\left(k(2k+1)+6(k+1)\right)}{6}\\&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\&=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Korak indukcije je dokazan pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje zadatka 3. Matematičkom indukcijom dokazujemo da je

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

i) Baza.
Za $n = 1$ imamo jednakost $1 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$ koja očito vrijedi.

ii) Pretpostavka.
Pretpostavimo da jednakost

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$.

iii) Korak.
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 &= \overbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3}^{=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2\left(k^2 + 4(k+1)\right)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Korak indukcije je dokazan, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje zadatka 4.

(a) *i) Baza.*
Za $n = 1$ imamo $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$, pa tvrdnja očito vrijedi.

ii) Pretpostavka.
Pretpostavimo da

$$3 \mid k^3 + 2k,$$

za neki $k \in \mathbb{N}$.

iii) Korak.
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$:

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\
&= \underbrace{k^3 + 2k}_{=3p,\text{ za neki } p\in\mathbb{N}} + 3k^2 + 3k + 3 \\
&= 3(p + k^2 + k + 1)
\end{aligned}$$

Korak indukcije je dokazan, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

(b) *i) Baza.*
Za $n = 1$ imamo $11^1 - 4^1 = 7$, pa tvrdnja očito vrijedi.

ii) Pretpostavka.
Pretpostavimo da

$$7 \mid 11^k - 4^k,$$

za neki $k \in \mathbb{N}$.

iii) Korak.
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$:

$$\begin{aligned} 11^{k+1} - 4^{k+1} &= 11 \cdot 11^k - 4 \cdot 4^k \\ &= 4 \cdot 11^k - 4 \cdot 4^k + 7 \cdot 11^k \\ &= 4 \underbrace{(11^k - 4^k)}_{=7p,\text{ za neki } p \in \mathbb{N}} + 7 \cdot 11^k \\ &= 7(4p + 11^k) \end{aligned}$$

Korak indukcije je dokazan, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

(f) *i) Baza.*
Za $n = 1$ imamo $2^{1+5} \cdot 3^4 + 5^{3+1} = 37 \cdot 157$, pa tvrdnja očito vrijedi.

ii) Pretpostavka.
Pretpostavimo da

$$37 \mid 2^{k+5} \cdot 3^{4k} + 5^{3k+1},$$

za neki $k \in \mathbb{N}$.

iii) Korak.
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$:

$$\begin{aligned} 2^{(k+1)+5} \cdot 3^{4(k+1)} + 5^{3(k+1)+1} &= 2 \cdot 3^4 \cdot (2^{k+5} \cdot 3^{4k}) + 5^3 \cdot 5^{3k+1} \\ &= 162 \cdot (2^{k+5} \cdot 3^{4k}) + 125 \cdot 5^{3k+1} \\ &= 125 \underbrace{(2^{k+5} \cdot 3^{4k} + 5^{3k+1})}_{=37p,\text{ za neki } p \in \mathbb{N}} + 37(2^{k+5} \cdot 3^{4k}) \\ &= 37(125p + 2^{k+5} \cdot 3^{4k}) \end{aligned}$$

Korak indukcije je dokazan, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje zadatka 5.

(a) *i) Baza.*
Za $n = 10$ imamo $2^{10} = 1024 > 1000 = 10 \cdot 10^2$, pa tvrdnja očito vrijedi.

ii) Pretpostavka.
Pretpostavimo da

$$2^k > 10k^2,$$

za neki $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 10$.

iii) Korak.
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$:

$$2^{k+1} = 2 \cdot \underbrace{2^k}_{>10k^2} > 20k^2$$

Kako je $20n^2 \geqslant 10(n+1)^2$, za svaki $n \geqslant 10$ (dokažite to!), imamo traženu nejednakost i za $k+1$.

(d) Za $n \in \mathbb{N}$ označimo

$$a_n = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \ldots \sqrt{4}}}},$$

pri čemu u gornjem izrazu ima n korijena. Tvrdimo da je $a_n < 3$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

i) Baza.
Za $n = 1$ imamo $a_1 = \sqrt{4} = 2 < 3$.

ii) Pretpostavka.
Pretpostavimo da $a_k < 3$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

iii) Korak.
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$. Uočimo da je

$$a_{k+1} = \sqrt{4 + a_k}.$$

Sada je prema pretpostavci $4 + a_k < 4 + 3 = 7$, a onda je $a_{k+1} < \sqrt{7} < 3$. Tražena nejednakost dakle vrijedi i za $k+1$.

Rješenje zadatka 6. Dokazujemo tvrdnju matematičkom indukcijom. Uočimo da tvrdnja ima smisla za $n \geqslant 3$, dakle koristimo generalizirani princip matematičke indukcije, pri čemu je $n_0 = 3$.

i) Baza.
Za $n = 3$ tvrdnja očito vrijedi jer trokut ima 0 dijagonala.

ii) Pretpostavka.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, odnosno da za taj k svaki k-terokut ima $\frac{k(k-3)}{2}$ dijagonala.

iii) Korak.
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$. Uzmimo proizvoljni $(k+1)$-terokut $\mathcal{P}$ i označimo jedan njegov vrh s T. Sada promotrimo k-terokut $\mathcal{P}'$ koji dobijemo "izbacivanjem" vrha T iz $(k+1)$-terokuta $\mathcal{P}$, odnosno $\mathcal{P}'$ je k-terokut kojem su stranice - dužina koja povezuje susjedne vrhove točke T i stranice od $\mathcal{P}$ bez stranica koje povezuju točku T sa susjednim vrhovima. (skicirajte!) Sada uočimo da su dijagonale od $\mathcal{P}$ koje ne sadrže točku T upravo dijagonale od $\mathcal{P}'$, zajedno s dijagonalom koja povezuje susjedne stranice od T. Dakle, ukupan broj dijagonala od $\mathcal{P}$ je za 1 veći od sume broja dijagonala od $\mathcal{P}'$ i broja dijagonala od $\mathcal{P}$ koje prolaze točkom T. Prvi broj u ovoj sumi je po pretpostavci jednak $\frac{k(k-3)}{2}$, a drugi broj je jednak $k-2$ jer je to broj spojnica vrha T s vrhovima u $\mathcal{P}$ koji mu nisu susjedni. Dakle, sveukupno imamo

$$\frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \frac{(k+1)((k+1)-3)}{2}$$

dijagonala.

Korak indukcije je dokazan, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje zadatka 9. Dokazujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje brojevi $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takvi da je $n = 3a + 5b$. Ponovno koristimo generalizirani princip matematičke indukcije, pri čemu je $n_0 = 8$.

i) Baza.
Za $n = 8$ tvrdnja očito vrijedi jer je $8 = 3 + 5$.

ii) Pretpostavka.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 8$, odnosno da za taj k postoje $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takvi da je $k = 3a + 5b$.

iii) Korak.
Dokazujemo tvrdnju zadatka za $k+1$. Ukoliko je $b \in \mathbb{N}$, tj. ako smo za plaćanje poštarine od k kn iskoristili barem jednu marku od 5 kn, tada zamijenimo tu marku s dvije marke od 3 kn i tako platimo iznos od $k+1$ kn. Preciznije, definiramo $a_1 = a + 2$, $b_1 = b - 1$ i uočimo da su $a_1, b_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i da vrijedi $k + 1 = 3a_1 + 5b_1$.
Ako je pak $b = 0$, odnosno iznos od k kn smo platili samo s markama od 3 kn, tada je $k = 3a$. Kako je $k \geqslant 8$, vidimo da mora biti $a \geqslant 3$. Dakle, sigurno smo upotrijebili barem tri marke. Sada zamijenimo neke tri marke od 3 kn s dvije marke od 5 kn, odnosno u ovom slučaju definiramo $a_1 = a - 3$, $b_1 = 2$ i ponovno imamo da su $a_1, b_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ te je $k + 1 = 3a_1 + 5b_1$.

Korak indukcije je dokazan, pa vrijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje zadatka 10.

i) *Baza.*
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi jer se piramida od jednog sloja sastoji od samo jedne loptice te imamo jednakost $1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{6}$.

ii) *Pretpostavka.*
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 8$, odnosno da je za piramidu od k slojeva potrebno $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ loptica.

iii) *Korak.*
Dokazujemo tvrdnju za piramidu od $k+1$ slojeva. Uočimo da takvu piramidu dobivamo kada piramidi od k slojeva dodamo još jedan, najdonji sloj. Dakle, potreban broj loptica jednak je zbroju broja loptica u tom najdonjem sloju i broja loptica potrebnih za izgradnju piramide od k slojeva. Prema pretpostavci, drugi broj jednak je $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$.
Znači sada još samo trebamo izračunati broj loptica u jednakostraničnom trokutu s $k+1$ loptica duž stranice. Lako možemo zaključiti da se taj trokut sastoji od

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

loptica, pri čemu posljednja jednakost slijedi iz prvog primjera. Dakle, za izgradnju piramide od $k+1$ loptica potrebno je

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} + \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{6}$$

loptica.

Korak indukcije je dokazan, pa vrijedi tvrdnja zadatka.