MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Što je dokaz?

29.11.2015.

Uvod

Često se može čuti da učenici, komentirajući zadatke, kažu da ne vole one zadatke koji počinju s "Dokažite da...". Ovo predavanje služi da razbijemo predrasudu da su takvi zadatci teški, ili dapače, da su ti zadatci uopće drukčiji od uobičajenih zadataka "koje volimo". Kao prvo, zadatak tipa "Dokažite da..." trebao bi biti lakši od "Izračunajte...". Pogledajmo primjer:

Primjer 1. *Izračunajte sumu:*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{29\cdot 30}.$$

Primjer 2. *Dokažite da je suma*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{29\cdot 30}$$

jednaka $\frac{29}{30}$.

Iako je drugi zadatak počeo čarobnom riječi "Dokažite", zadatak je malo lakši jer znamo koji rezultat trebamo dobiti.

Također, i kod drugih primjera zadataka koji nisu oblika "Dokažite", rješenje će u sebi sadržavati neke dokaze. Cilj ovog predavanja je da naučite razlikovati valjan od nevaljanog dokaza.

Prije nego što krenemo s predavanjem, jedna napomena: u ovom predavanju nije bitno znate li riješiti zadatke iz primjera koji će se pojavljivati. Cilj je da ti primjeri budu lagani i svima razumljivi. Bitno je da znate riješiti te zadatke pravilno.

Novi pojmovi

Da bismo lakše razlikovali valjani od nevaljanog dokaza, moramo naučiti neke nove pojmove.

Pojam **tvrdnja** ne treba mnogo objašnjavati. To je neki sud, neka rečenica, koju želimo dokazati, ili koju koristimo u dokazu neke tvrdnje. Nadalje, tvrdnja može biti i netočna.

Primjer 3. *Primjeri tvrdnji:*

- Listopad je deseti mjesec u godini.
- Ana ima deset godina i Ivan ima jedanaest godina.
- Broj x je paran ili je broj y potpun kvadrat.
- Svaki prirodan broj veći je od nule.
- Neki prost broj ima sto različitih djelitelja.

Napomena: među tvrdnjama u primjeru sakrila se i jedna netočna. Odredite koja je to. Dakako, to je i dalje tvrdnja. Tvrdnju možemo i negirati. Tada dobijemo **negaciju tvrdnje**. U nekim slučajevima negacija je jednostavna, no ponekad nije. Primjerice, ako je tvrdnja oblika *A i B*, njena negacija je *neA ili neB*. Slično, negacija tvrdnje oblika *A ili B* je *neA i neB*. To možete provjeriti primjerom iz stvarnog života:

- Negacija tvrdnje *Matija je bolji od mene i Luka je bolji od mene* je *Matija nije bolji od mene ili Luka nije bolji od mene* (ili drukčije rečeno, *Bar jedan od njih dvojice nije bolji od mene.*), a ne ~~*Matija nije bolji od mene i Luka nije bolji od mene*~~ (tj., ~~*Nijedan od njih dvojice nije bolji od mene*~~).

- Negacija tvrdnje *Mama mi je dala novac ili mi je tata dao novac* je *Mama mi nije dala novac i tata mi nije dao novac* (ili drukčije rečeno, *Ni mama ni tata mi nisu dali novac*), a ne ~~*Mama mi nije dala novac ili tata mi nije dao novac*~~ (tj., ~~*Bar jedno od njih dvoje mi nije dalo novac*~~).

Slično moramo paziti i kod negiranja tvrdnji koje u sebi sadrže riječi "svaki" (ili "svi") i "neki" (ponekad ćemo reći i "postoji"). Primjerice, ako tvrdimo nešto za "svaki" prirodan broj, tada tvrdimo da to vrijedi i za $n = 1$, i za $n = 2$ .... Zato, prema gornjim zaključcima, negacija je te tvrdnje da to ne vrijedi za $n = 1$ ili $n = 2$ ili $n = 3$.... Slično je i kod obratne situacije.

Primjer 4. *Negacije tvrdnji iz prošlog primjera su:*

- Listopad nije deseti mjesec u godini.
- Ana nema deset godina ili Ivan nema jedanaest godina.
- Broj x nije paran i broj y nije potpun kvadrat.
- Neki prirodan broj nije veći od nule.
- Nijedan prost broj nema sto različitih djelitelja *(jer u duhu hrvatskog jezika nije da kažemo* Svaki prost broj nema sto različitih djelitelja.*)*

Jedan način kako da pripazimo jesmo li na pravi način negirali tvrdnju je sljedeći:

- Tvrdnja i njena negacija obuhvaćaju sve moguće slučajeve.
- Točno jedna od njih je istinita.

Sljedeći bitan pojam je **implikacija**. Implikacija nastaje kada dvije tvrdnje povežemo uzročno-posljedičnom vezom: *Ako vrijedi tvrdnja A, onda vrijedi tvrdnja B.* Implikaciju označavamo sa $A \implies B$.

Primjer 5. *Primjeri implikacija:*

- Ako je sada listopad, sljedeći mjesec je studeni.
- Ako osoba ima manje od osamnaest godina, ne konzumira alkohol.
- Ako je neki x djeljiv s 4, onda je djeljiv s 2.
- Ako su svi prirodni brojevi nenegativni, tada je neki realan broj prirodan.

Implikacije su ključne za rješavanje nekih zadataka. Zadatak je najčešće koncipiran tako da su nam zadane tvrdnje $A_1, \dots, A_n$, i trebamo dokazati tvrdnju B. Naše rješenje bit će neko razgranato stablo povezano implikacijama, kojima ćemo zaključivanjem iz početnih tvrdnji na kraju zaključiti završnu tvrdnju.

Primijetimo još nekoliko stvari. Kao prvo, implikacija opet može biti istinita ili neistinita. Također, implikacija dviju tvrdnji zapravo je nova tvrdnja. Teoretski, implikacija može biti sastavljena i od tvrdnji koje su već implikacije nekih jednostavnijih tvrdnji. Ali, to je već za one koji žele znati više i neće nam biti potrebno. Ono što će nam biti potrebno je da se implikacija može negirati.

Upravo negacija implikacija je jedan čest primjer pogrešaka. Pokušajmo objasniti pravilnu negaciju na primjeru

Ako Ivan ima manje od osamnaest godina, ne konzumira alkohol.

Koja je negacija ove tvrdnje? Postavite si pitanje: kako za neku osobu znamo da je prekršila ovo pravilo? Zasigurno ste si već u glavi zamislili maloljetnika koji pije alkohol. Da, to je točno, dakle negacija naše tvrdnje je

Ivan ima manje od osamnaest godina i konzumira alkohol,

a ne

~~*Ako Ivan ima manje od osamnaest godina, konzumira alkohol,*~~

ili bilo koja varijacija gornje tvrdnje. Ukratko **negacija implikacije nije nova implikacija**, tj. nije zapisiva u formatu *Ako ..., onda ....* Pravilo je sljedeće

$$\text{Negacija od } A \Rightarrow B \text{ je } A \ i \ neB.$$

Također, kod negacije implikacije treba obratiti pažnju i prilikom negiranja implikacija u kojima se pojavljuju riječi "svaki" i "neki".

Primjer 6. *Negacije implikacija iz prošlog primjera:*

- Sada je listopad i sljedeći mjesec nije studeni.
- Osoba ima manje od osamnaest godina i konzumira alkohol.
- Svaki broj x je djeljiv s 4 i nije djeljiv s 2.
- Svi su prirodni brojevi nenegativni i nijedan realni broj nije prirodan.

Iako smo jasno rekli kako se implikacije negiraju, primijetimo što ćemo dobiti sljedećom transformacijom:

$$\text{Za implikaciju } A \Rightarrow B \text{ promotrimo implikaciju } neB \Rightarrow neA.$$

Primjer 7. *Primjeri transformiranih tvrdnji:*

- Ako sljedeći mjesec nije studeni, tada ovaj mjesec nije listopad.
- Ako osoba konzumira alkohol, onda ona ima barem osamnaest godina.
- Ako neki broj nije djeljiv s 2, onda nije djeljiv ni s 4.
- Ako nijedan realni broj nije prirodan, onda je neki prirodan broj negativan.

Na prvim primjerima jasnije, a na kasnijim malo manje vidimo da smo spomenutom transformacijom dobili **jednake tvrdnje**. Ovo će biti ključ jedne metode dokazivanja.

Nadam se da su vam implikacije sjele. Jer ono što slijedi je kombinacija dviju implikacija. Kažemo da su tvrdnje A i B **ekvivalentne** ako jedna implicira (ili povlači) drugu i obratno, tj. ako je $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$. Oznaka za to je $A \iff B$. U zadatcima se ova tvrdnja izriče riječima "ako i samo ako". Sigurno ste se susreli s nekim teoremima koji spominju ekvivalenciju, ali do sada niste na to obraćali pažnju.

Primjer 8. *Primjeri (točnih) ekvivalentnih tvrdnji*

- Trokut je pravokutan (s hipotenuzom c) ako i samo ako za njegove duljine stranica vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$ (Pitagorin poučak).
- Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.

Kao što smo rekli, ekvivalencije su dvije implikacije i tome treba pristupati na taj način:

- Ako je neki uvjet u zadatku dan ekvivalencijom, smijemo (i najčešće moramo, kako bismo uopće riješili zadatak) iskoristiti obje implikacije.
- Ako je tvrdnja zadatka dokazati ekvivalenciju, tada trebamo dokazati dvije implikacije, dakle, trebamo pristupiti kao da rješavamo dva zadatka.

Sad bismo i sami trebali znati kako negirati ekvivalenciju.

Također, sada kad znamo što je ekvivalencija, onu transformaciju od prije možemo prokomentirati matematički točnijim rječnikom. Dakle, tvrdnje $A \Rightarrow B$ i $neB \Rightarrow neA$ su **ekvivalentne**. Ne možemo baš reći da su tvrdnje iste, ali možemo reći da kad god vrijedi jedna, da tada vrijedi druga i obratno.

Primjer zadatka

Svjestan sam da je gornji dio dosadan, barem je bio manje zabavan od uobičajenih online predavanja. Ali sad ćemo vidjeti zašto je to bilo bitno.

Zadatak 1.
Nađite rješenja jednadžbe
$$\sqrt{x^2+5} = 2x+1.$$

Prvo rješenje.
Kvadriramo jednakost:
$$\begin{aligned} x^2+5 &= 4x^2+4x+1 \\ 0 &= 3x^2+4x-4 \\ 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$
Dakle, rješenja jednadžbe su $x = \frac{2}{3}$ i $x = -2$.

Ovo se čini kao valjano rješenje, sve dok ne provjerimo dobivena rješenja. Tada vidimo da $x = \frac{2}{3}$ jest rješenje, no $x = -2$ nije. Postavlja se pitanje gdje smo pogriješili.

Vjerojatno ste u školi naučili da u takvim tipovima zadataka (kada se pojavljuje korijen na bar jednoj strani jednakosti) na kraju rješavanja treba provjeriti rješenje. Sada ćemo bolje objasniti zašto to treba napraviti i kada to treba napraviti.

Primijetimo da smo u stvari našim nizom jednakosti uspostavili niz implikacija. Za sve x za koje vrijedi jednakost $\sqrt{x^2+5} = 2x+1$, zaključili smo da vrijedi i jednakost $x^2+5 = 4x^2+4x+1$, pa smo zaključili da za sve takve x vrijedi i jednakost $0 = 3x^2+4x-4$, itd., dok nismo zaključili da za sve takve x vrijedi da su u skupu $\{-2, \frac{2}{3}\}$. Dakle, dobili smo implikaciju:

ako je x rješenje prve jednadžbe, onda se ono nalazi u skupu $\{-2, \frac{2}{3}\}$.

Ono što smo mi na kraju zaključili je da je konačan skup rješenja upravo skup koji smo i dobili na kraju: $\{-2, \frac{2}{3}\}$. Dakle, zaključili smo i obratno

ako je x u skupu $\{-2, \frac{2}{3}\}$, onda ono zadovoljava i prvu jednadžbu $\sqrt{x^2+5} = 2x+1$.

Dakle, pretpostavili smo da smo dobili ekvivalenciju, ne samo implikaciju. Tu se krije pogreška u našem zaključivanju. Provjerimo imamo li doista tu drugu implikaciju.

Uistinu, ako je x u skupu $\{-2, \frac{2}{3}\}$, onda zadovoljava jednakost $3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2) = 0$, neupitno zadovoljava jednakost $0 = 3x^2+4x-4$, i neupitno zadovoljava jednakost $x^2+5 = 4x^2+4x+1$. U svakom od ovih koraka samo smo drugačije zapisali svaku stranu jednakosti, ili smo na svaku stranu jednakosti dodali jednak broj. Dopušteno nam je bilo i svaku stranu jednakosti pomnožiti jednakim brojem. No, sljedeći korak
$$x^2+5 = 4x^2+4x+1 \Rightarrow \sqrt{x^2+5} = 2x+1$$
više nije dozvoljen. Naime, ovaj zaključak jednak je zaključku
$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b.$$
Znamo da to općenito ne vrijedi (pogledajte primjer $a = -7, b = 7$).

Između svake druge dvije jednakosti mi smo uspostavili ekvivalenciju, samo između prve dvije nismo imali ekvivalenciju. Zbog toga više nismo mogli reći da je skup koji smo dobili na kraju uistinu skup rješenja naše jednadžbe, nego samo nadskup. Da nađemo koji je to uistinu podskup, najjednostavnije je provjeriti sve brojeve iz rješenja.

Dakle, ovako bi išlo pravilno rješenje:

Drugo rješenje.
Počnimo od prve jednakosti:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+5} &= 2x+1 \\ \implies \text{(kvadriranjem) } x^2+5 &= 4x^2+4x+1 \\ \iff 0 &= 3x^2+4x-4 \\ \iff 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2) &= 0 \\ \iff x &\in \{-2, \frac{2}{3}\}. \end{aligned}$$

Kako smo dobili da je prva jednakost implicira $x \in \{-2, \frac{2}{3}\}$, znamo da ako je x rješenje, da se nalazi u spomenutom skupu. Sada trebamo samo izbaciti "uljeze" iz skupa, tj. provjeriti koji brojevi u skupu nisu rješenje. To se radi direktnom provjerom:

$$x=-2: \sqrt{x^2+5}=3,\ 2x+1=-3 \implies x=-2 \text{ nije rješenje;}$$
$$x=\frac{2}{3}: \sqrt{x^2+5}=\frac{7}{3},\ 2x+1=\frac{7}{3} \implies x=\frac{2}{3} \text{ jest rješenje.}$$

Dakle, $x=\frac{2}{3}$ je jedino rješenje jednadžbe.

Zato, odsad, svaki put kada rješavate jednadžbu, pišite znakove ekvivalencije (ako su jednadžbe ekvivalentne, dakako). Da smo u prošlom zadatku dobili da su sve jednadžbe ekvivalentne, ne bismo morali raditi završnu provjeru, jer bismo imali

$$x \text{ zadovoljava } \sqrt{x^2+5}=2x+1 \iff x \text{ je u skupu } \{-2, \tfrac{2}{3}\},$$

dakle, imali bismo uistinu pravi skup rješenja.

Pisanje ekvivalencija je posebno bitno kod rješavanja nejednakosti, jer se tamo često dogodi da nemamo implikaciju. Često se na natjecanjima dogodi da, iako sve nejednakosti koje primijenite budu ekvivalentne, rješenje vam ne bude evaluirano kao valjano (za maksimalan broj bodova) samo zbog toga što niste popisali znakove ekvivalencije.

Pogledajmo jedan drugi primjer zadatka:

Zadatak 2.
Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a+b=1$, $ab \neq 0$. Dokažite da je

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

Rješenje.
Primijetimo prvo da su svi izrazi dobro definirani, jer brojevi a^3-1 i b^3-1 nisu nula. Razlog tome je što je

$$(a^3-1)=(a-1)(a^2+a+1).$$

Druga zagrada nikad nije nula za realne brojeve (kvadratna jednadžba nema realnih nultočaka). S druge strane, koristeći $a+b=1$ i $ab \neq 0$ vidimo da b nikad nije nula, pa stoga a nikad nije jedan, dakle, ni $(a-1)$ nikad nije nula. Slično za (b^3-1).

Prvo zapišimo neke identitete koji će nam možda zatrebati:

1. $1=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \implies a^2+b^2-1=-2ab$.
2. $1=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=a^3+b^3+3ab \implies a^3+b^3=1-3ab$.
3. $(a^4-b^4)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=(a-b)(a^2+b^2)$.

Pojednostavljujemo izraz koji treba dokazati:

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$
$$\frac{a^4-a-b^4+b}{(a^3-1)(b^3-1)}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$
$$\frac{(a^4-b^4)-(a-b)}{(a^3-1)(b^3-1)}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$
$$\text{koristimo 3: } \frac{(a^2+b^2)(a-b)-(a-b)}{(a^3-1)(b^3-1)}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\frac{(a-b)(a^2+b^2-1)}{(a^3-1)(b^3-1)} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$\text{koristimo 1: } \frac{-(a-b)2ab}{(a^3-1)(b^3-1)} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$$

$$-(a-b)2ab(a^2b^2+3) = 2(b-a)(a^3-1)(b^3-1)$$

$$(b-a)(2a^3b^3+6ab) = 2(b-a)(a^3b^3-(a^3+b^3)+1)$$

$$\text{koristimo 2: } (b-a)(2a^3b^3+6ab) = 2(b-a)(a^3b^3-(1-3ab)+1)$$

$$(b-a)(2a^3b^3+6ab) = 2(b-a)(a^3b^3+3ab)$$

$$(b-a)(2a^3b^3+6ab) = (b-a)(2a^3b^3+6ab)$$

$$0=0$$

Time je dokaz gotov.

Odmah u detalje, ovaj dokaz je kriv. Opet, kada mi pišemo jednakosti iz reda u red, ako drukčije ne naglasimo, mi smatramo da kažemo *ako vrijedi prva linija, onda vrijedi druga linija*, itd. Ako tako pročitamo naš dokaz, mi smo zapravo dokazali

Ako vrijede pretpostavke zadatka ($a+b=1, ab\neq 0$) i ako vrijedi

$$\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3},$$

tada je $0=0$.

Ono kako smo mislili da ćemo izvesti dokaz je:

Ako vrijede pretpostavke zadatka ($a+b=1, ab\neq 0$) i ako vrijedi $0=0$ *(što je pretpostavka koju smijemo dodati pretpostavkama zadatka, jer je uvijek točna)*, tada je

$$\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

Postoje dva načina kako popraviti ovaj dokaz. Jedan je prepisati sve jednakosti koje smo napisali, i zapisati ih u obratnom redoslijedom. Tako će netko moći uistinu pročitati $0=0 \implies ... \implies$ *jednakost koju smo trebali dokazati*. No, složit ćemo se, to je mnogo posla. Također, tako nitko neće moći vidjeti naš tok misli, i nitko neće moći ništa naučiti iz našeg rješenja. Drugi, mnogo lakši zapis, je da na početku svake jednakosti napišemo znak $\Leftrightarrow$. Time smo naznačili da su sve jednakosti koje smo napisali ekvivalentne.

To je upravo i način kako inače postupati u zadacima. Ako trebamo dokazati neki komplicirani identitet, teško je početi nekako drugačije nego da počnemo od tog identiteta. Dakle, naš tok misli je da komplicirani identitet zamjenjujemo jednostavnijima, dok ne dobijemo neki jednostavni za koji neupitno znamo da je točan. Kada ga dobijemo, provjerimo jesu li sve jednakosti po tom putu ekvivalentne. Ako da, kod svake jednakosti stavimo znak ekvivalencije, naznačavajući da smo svjesni da su jednakosti ekvivalentne. Time je dokaz potpun.

Iako se u ovom trenutku čini da postavljanjem niza znakova ekvivalencija nismo postigli mnogo, varate se. To razlikuje pravo rješenje od krivog rješenja. Može se dogoditi da u nekoj jednakosti kvadriramo ili korijenujemo svaku stranu jednakosti, čime nestaje ekvivalencija i dokaz više nije valjan.

Pogledajmo još jedan jednostavan primjer kod dokazivanja nejednakosti.

Zadatak 3.
Dokažite nejednakost

$$\frac{ab}{a^2+b^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

za sve realne brojeve a, b takve da je $ab \neq 0$.

Rješenje.
Iako smo u školi vjerojatno naučili pravilo **nikad ne množiti nejednakosti s nepoznatim izrazom**, to ćemo pravilo odmah sada malo promijeniti. Pomnožimo obje strane nejednakosti s $2(a^2+b^2)$. Kako je taj broj različit od nule (jer je $ab \neq 0$) i kako je nenegativan (kao zbroj kvadrata realnih brojeva), on je pozitivan. Množenjem jednakosti s pozitivnim brojem ne mijenja se znak nejednakosti, pa je sve u redu. *(U nejednakostima često želimo množiti svaku*

strani nekim nepoznatim izrazom. To smijemo napraviti nakon što napravimo analizu poput gornje.) Nakon množenja početne nejednakosti s $2(a^2+b^2)$ dobijemo

$$\Leftrightarrow \ 2ab \leqslant a^2+b^2.$$

Sada uočavamo kvadrat razlike, a nakon toga će dokaz biti i gotov:

$$\Leftrightarrow \ 0 \leqslant (a-b)^2.$$

Kako zadnja nejednakost vrijedi za svaka dva realna broja i nejednakost je ekvivalentna početnoj, dokaz je gotov. Jednakost u prvoj nejednakosti vrijedi onda i samo onda kad vrijedi i u zadnjoj nejednakosti, a to je kad je $a=b\neq 0$.

Opet, upravo postavljanje znakova ekvivalencija (i komentiranje tih ekvivalencija kad nije najjasnije da te ekvivalencije uistinu vrijede) razlikuje valjano od nevaljanog rješenja. Zato je ovo rješenje valjano.

Primijetimo i veznik koji smo iskoristili na kraju: *onda i samo onda*. To je još jedan način izražavanja ekvivalencije. Ono što smo uistinu htjeli reći zadnjom rečenicom je

Ako vrijedi jednakost u prvoj nejednakosti, onda vrijedi i u zadnjoj. Također, ako vrijedi jednakost u zadnjoj nejednakosti, tada vrijedi i u prvoj.

Opet, upravo su nam ekvivalencije omogućile ovakav zaključak.

Obrat po kontrapoziciji

Ovaj veliki termin spomenut u naslovu poglavlja već smo naučili u jednom od drugih poglavlja. **Obrat po kontrapoziciji** komplicirani je način izražavanja ekvivalencije između sljedećih tvrdnji

Tvrdnja $A \Rightarrow B$ ekvivalentna je s $neB \Rightarrow neA$.

Pokažimo kako ćemo to iskoristiti na jednom primjeru iz geometrije:

Zadatak 4.
Dan je četverokut $ABCD$ u kojem ne vrijedi $a+c=b+d$ za duljine njegovih stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$. Dokažite da tada četverokut nije tangencijalan.
Napomena: četverokut je **tangencijalan** ako mu se može upisati kružnica. U ovom će zadatku biti pokazano jedno korisno svojstvo tangencijalnih četverokuta, a više govora o tangencijalnim četverokutima bit će u kasnijim predavanjima.

Rješenje.
Obrat po kontrapoziciji u ovom zadatku nameće se sam od sebe, budući da ne znamo nikako iskoristiti pretpostavku oblika *ne vrijedi ...*. Dakle, umjesto ovog zadatka, dokazujemo njegovu reformulaciju:

Dan je četverokut $ABCD$ koji jest tangencijalan. Dokažite da tada vrijedi $a+c=b+d$ za duljine njegovih stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$.

Dokaz koji slijedi ne koristi nikakve nove trikove, nego je klasičan geometrijski dokaz. Kako je četverokut tangencijalan, postoji njemu upisana kružnica, koja ima središte u S. Neka dodiruje njegove stranice $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ u točkama E, F, G, H redom.
Kako se točke E, H nalaze na spomenutoj kružnici, vrijedi $|ES|=|SH|$. Nadalje, kako kružnica dodiruje spomenute dužine baš u točkama E, H, te su dužine tangente spomenute kružnice u tim točkama, pa je $\angle SEA = \angle SHA = 90°$. Konačno, kako trokuti SAE i SHA dijele stranicu $\overline{AS}$, prema SSK poučku (pravi kut zasigurno je najveći kut u trokutu), ti trokuti su sukladni. Odavde ćemo zaključiti $|AE|=|AH|$. Na sličan način zaključujemo ukupno četiri jednakosti:

$$|AE|=|AH|,\ |BE|=|BF|,\ |CF|=|CG|,\ |DG|=|DH|.$$

Odavde je

$$a+c=|AB|+|CD|=|AE|+|BE|+|CG|+|DG|=|AH|+|BF|+|CF|+|DH|=|AD|+|BC|=b+d,$$

čime je dokaz gotov.

Dakle, ukoliko imamo tvrdnje u zadatku koje su oblike *ne vrijedi...*, isplati se pokušati napasti zadatak obratom po kontrapoziciji. Također, možemo ga primijeniti i u nekim nejednakostima oblika:

Ako za neke realne brojeve vrijedi

kompliciran izraz 1 $\geqslant$ *kompliciran izraz 2*,

dokažite da je tada

jednostavan izraz 1 $\geqslant$ *jednostavan izraz 2*.

Ponekad je lakše rješavati transformiran zadatak:

Ako za neke realne brojeve vrijedi

jednostavan izraz 1 $<$ *jednostavan izraz 2*,

dokažite da je tada

kompliciran izraz 1 $<$ *kompliciran izraz 2*.

Metoda kontradikcije

Mnogi ovu metodu dokazivanja nazivaju metodom. Mišljenje autora ovog predavanja je da je to krivo, i da je ovo samo jedan mali alat koji pomaže.

Pogledajmo kako funkcionira. Svi zadatci su sljedećeg oblika:

Poznato je da vrijede tvrdnje $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Dokažite da tada vrijedi tvrdnja B.

Metoda kontradikcije funkcionira na sljedeći način:

Pretpostavimo da vrijede tvrdnje $A_1, A_2, \ldots, A_k$, neB. Dokažimo da sve te pretpostavke ne mogu zajedno vrijediti, tj. da pretpostavljanjem svega navedenog dobivamo neku neistinitu tvrdnju. Dobit ćemo kontradikciju.

Kako znamo da je takvo nešto valjano? Prvi pristup da to vidimo je sljedeći: pretpostavimo da vrijedi $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Tada ili vrijedi B ili vrijedi neB. Idemo dokazati da sigurno neće vrijediti neB.

Drugi slučaj da to zaključimo je sljedeći: naš zadatak je dokazati sljedeću implikaciju:

$$(A_1, A_2, \ldots, A_k) \implies B.$$

Rekli smo kako dobijemo negaciju te tvrdnje:

negacija zadatka: $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ i neB.

Dakle, dokazat ćemo da to ne vrijedi, tj.

Dokažimo da je nemoguće imati $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ i neB.

Da dokažemo da neki skup pretpostavki ne vrijedi, najčešće ćemo dobiti da istovremeno treba vrijediti A_i (neka pretpostavka) i neA_i (negacija te pretpostavke). Znamo da to istovremeno ne može vrijediti. Ponekad možemo dobiti i neku nesmislenu tvrdnju: ako iz gore navedenog skupa pretpostavki dobijemo primjerice $1 = 0$, dobili smo da je nemoguće imati $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ i neB, čime smo dobili **kontradikciju**, i opet je dokaz potpun.

Idemo to objasniti na primjeru:

Zadatak 5.
Dokažite da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Rješenje.
Ovo je dobar primjer na kojem pokazati ovaj način dokazivanja, budući da praktički nemamo nijednu pretpostavku u zadatku. Sve što trebamo dokazati je da je $\sqrt{2}$ iracionalan.

Kao i u svakom rješenju koje ide na ovaj način, mi ćemo **pretpostaviti suprotno**, tj. pretpostavimo da je $\sqrt{2}$ racionalan. Sada trebamo dobiti neku **kontradikciju**.

Koristimo definiciju racionalnog broja: broj x je racionalan ako postoje cijeli broj m i prirodan broj n takvi da je $x = \frac{m}{n}$. Dakle, neka su m i n takvi brojevi da je $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Možemo dodatno i **bez smanjenja općenitosti pretpostaviti** da su m i n relativno prosti, tj. da im je najveći zajednički djelitelj jednak 1. Ako nije, ako imaju neki faktor d, dijeljenje brojnika i nazivnika s tim brojem ne mijenja vrijednost razlomka. Dakle, imamo

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \ D(m,n) = 1.$$

Kvadriramo jednakost i pomnožimo obje strane s n^2:

$$\implies 2n^2 = m^2.$$

Primjećujemo da je lijeva strana jednakosti parna, pa takva mora biti i desna. Dakle, m mora biti paran. Neka je m_1 cijeli broj takav da je $m = 2m_1$. Uvrstimo to u sljedeću gornju jednakost:

$$\implies 2n^2 = 4m_1^2 \implies n^2 = 2m_1^2.$$

Dobili smo jednu sličnu jednakost. Slično zaključujemo da je n paran: postoji prirodan broj n_1 takav da je $n = 2n_1$.

No, primijetimo da smo sada dobili da su i m i n parni brojevi. Dakle, $D(m,n) \geqslant 2$ (pišemo veće ili jednako jer teoretski može biti i neki još veći djeljitelj). Mi smo pretpostavili da je $D(m,n) = 1$. Time smo dobili kotradikciju. Ono što smo prvotno pretpostavili se ispostavilo krivo, dakle $\sqrt{2}$ jest iracionalan.

Napominjemo dvije stvari:

- U jednom trenutku uveli smo jednu dodatnu pretpostavku ($D(m,n) = 1$), naglasivši da smo to uveli bez smanjenja općenitosti. Općenito, u rješavanju raznih zadataka, nešto *možemo pretpostaviti bez smanjenja općenitosti* ako nam ta dodatna pretpostavka smanjuje broj slučajeva koje treba provjeriti, a tu pretpostavku nije pogrešno uvesti. U ovom primjeru nije bilo pogrešno pretpostaviti da je $D(m,n) = 1$ zato što ako je $D(m,n) = k$, možemo cijeli dokaz primijeniti za brojeve m', n', gdje je $m' = \frac{m}{k}, n' = \frac{n}{k}$. Česta pretpostavka bez smanjenja općenitosti je uređaj varijabli (npr. $a \geqslant b \geqslant c$), naravno ukoliko je nejednakost simetrična.
- Primijetimo da kontradikcija koju smo dobili nije neka sam po sebi kontradiktorna tvrdnja (poput $1 = 0$) ili tvrdnja koja je u sukobu s nekom pretpostavkom iz zadatka, nego je kontradikcija s pretpostavkom koja je proizašla iz pretpostavljanja bez smanjenja općenitosti. Iako se to čini čudnim, dokaz je točan: dobili smo dvije tvrdnje ($D(m,n) = 1$ i $D(m,n) \geqslant 2$) koje se zajedno pobijaju.

Problemi u kombinatorici

U logično-kombinatornim zadatcima postoji jako mnogo načina kako proizvesti nevaljan dokaz, i teško je popisati sve opasnosti. Ovdje ćemo opisati dva primjera.

Zadatak 6.
Dano je $n+1$ prirodnih brojeva manjih ili jednakih $2n$. Dokažite da među njima postoje dva koja su relativno prosta.

Prvo rješenje.
Uzmimo sve parne brojeve iz skupa $\{1, \ldots, 2n\}$. Njih ima n. Trebamo uzeti još jedan broj. Koji god uzmemo, naći ćemo neki broj koji je relativno prost s njim (primjerice, njegov sljedbenik ili prethodnik već se nalazi u skupu, a oni su relativno prosti). Kako i u ovom najgorem slučaju ne možemo staviti $n+1$ brojeva u skup tako da nikoja dva ne budu relativno prosta, dokaz je gotov.

Ukratko, ukoliko za neku konstrukciju kažemo da je najgori slučaj, u 99% slučajeva možemo reći da je rješenje krivo. Što znači da je neki slučaj najgori? Je li taj slučaj najgori? Kako znamo da i u ostalim slučajevima, koji su malo manje "gori", nećemo moći naći skup od $n+1$ brojeva?

Svaki dokaz mora se temeljiti na pretpostavkama zadatka, poznatim teoremima i tvrdnjama i na implikacijama koje su jasne i točne. U algebarskim zadatcima te implikacije su jasne, jer malo promijenimo svaku stranu jednakosti. U kombinatornim zadatcima to se mijenja, ne postoje jasne spone jer ni ne postoje jasne tvrdnje poput jednakosti ili nejednakosti. Najbolji način kako provjeriti točnost svog zadatka je da si na svaku svoju tvrdnju postavite pitanje zašto. Također, ako već koristite pojam "najgori slučaj", odgovorite na pitanje po kojem kriteriju najgori slučaj, i možete li dokazati da je to najgori slučaj?

Pokažimo sad i pravilno rješenje. Temelji se na Dirichletovom načelu, koji je prezentiran u nekom od prvih online predavanja.

Drugo rješenje.
Pripremimo rješenje za Dirichletov princip: promotrimo "kutije" $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, ..., $\{2n-1, 2n\}$. Kutija ima n. Znamo da je na početku odabrano $n+1$ brojeva. Dakle, prema Dirichletovom principu, postoji barem jedna kutija u kojoj su odabrana barem dva (dakle oba) broja. Stoga, zasigurno smo odabrali dva uzastopna prirodna broja ($2k-1, 2k$ iz iste kutije) među tih $n+1$. Ta su dva broja relativno prosta (ako neki d dijeli svaki od njih, onda dijeli i njihovu razliku, koja je jednaka 1).

Pokažimo još jednu čestu pogrešku koja se pojavljuje i u nekombinatornim zadatcima.

Zadatak 7.
Sedam košarkaških klubova odlučilo je odigrati ligu. Svaka dva kluba trebaju odigrati međusobno točno jednu utakmicu. Svaki klub može odigrati jedan dan točno jednu utakmicu. Odredite najmanji mogući broj dana u kojem oni mogu odigrati ligu. (Za razliku od stvarnog života, pretpostavljamo da igračima ne trebaju dani pauze, tj. ako treba, mogu odigrati i sve utakmice u uzastopnim danima.)

Prvo rješenje.
Dano je $n = 7$ klubova. Svaki klub mora odigrati točno jednu utakmicu sa svakim drugim klubom. To je ukupno $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ utakmica (dijelimo s dva jer bismo u suprotnom dvaput brojali utakmicu A s B i B s A). Svaki dan mogu se odigrati najviše tri utakmice (kad bi bilo četiri ili više utakmica, po Dirichletovom principu dobijemo da je to nemoguće - sami zaključite zašto). Dakle, dobili smo da je potrebno najmanje $21/3 = 7$ dana da bi se završio turnir.
Sada trebamo dokazati da se za $n = 7$ može i konstruirati takav turnir. Nazovimo klubove prirodnim brojevima $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Tada je primjer jednog takvog turnira:

- 1. dan igraju: $(1, 2), (2, 4), (5, 6)$
- 2. dan igraju: $(1, 3), (2, 4), (5, 7)$
- 3. dan igraju: $(1, 4), (2, 3), (6, 7)$
- 4. dan igraju: $(1, 5), (2, 6), (3, 7)$
- 5. dan igraju: $(1, 6), (2, 7), (4, 5)$
- 6. dan igraju: $(1, 7), (3, 5), (4, 6)$
- 7. dan igraju: $(2, 5), (3, 6), (4, 7)$

Direktna provjera dokazuje da svaki klub igra sa svakim klubom točno jednu utakmicu i da nijedan dan ne igra dvije utakmice.

Neke čitatelje drugi dio dokaza mogao bi iznenaditi. Je li to uistinu potrebno dokazati? Odgovor je da. Općenito, u zadatcima oblika *Nađite najmanji prirodan broj takav da ima neko svojstvo* treba dokazati dvije tvrdnje:

- Taj prirodan broj (koji smo našli i tvrdimo da je odgovor na pitanje) ima zadano svojstvo.
- Taj prirodan broj uistinu jest najmanji s tim svojstvom (ili lakše dokazivo, nijedan broj manji od tog broja nema to svojstvo).

Sad je malo jasnije da jedan dio dokaza ne može ići bez drugog:

- Ako dokažemo samo da taj broj ima to svojstvo, ne znamo je li to najmanji. Neki manji broj može također imati to svojstvo.
- Ako dokažemo da nijedan broj manji od tog nema dano svojstvo, ne znamo da naš broj uistinu ima zadano svojstvo.

Prvi dio dokaza gornjeg zadatka odgovara drugoj natuknici, konstrukcija odgovara drugoj natuknici. Da pokažemo da je naš dokaz, da se nismo držali gornjih pravila, mogao biti pogrešan, "dokažimo" (na krivi način) da je rješenje zapravo 6.

Drugo rješenje.
Znamo da svaki klub mora odigrati točno 6 utakmica. To se ne može napraviti u manje od 6 dana. Dakle, turnir se mora odvijati barem 6 dana. Zato tvrdim da je odgovor 6.

U kontekstu prvog dokaza i gornje rasprave, jasno je da je drugo rješenje krivo. Ipak, izvan tog konteksta, lako se zabuniti.

Pogledajmo još jedan primjer takvog zadatka u nejednakostima.

Zadatak 8.
Dani su pozitivni realni brojevi a, b, c takvi da je $abc = 1$. Nađite najveći realan broj m takav da je zadovoljena nejednakost

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \geqslant m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Rješenje.
Uz jedinu razliku da se sad ne traži najmanji nego najveći broj s nekim svojstvom, napadamo zadatak jednako. Tražimo kandidata takvog da je nejednakost zadovoljena za sve a, b, c, a onda dokažemo da je to i najveći takav m.
Za ovaj zadatak potrebna nam je AG nejednakost za dva nenegativna realna broja x, y:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

Ova je nejednakost ekvivalentna s

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0,$$

pa očito vrijedi. Više riječi o AG i sličnim nejednakostima bit će u idućim predavanjima.
Primjenjujemo spomenutu nejednakost za svaka dva para sumanada s lijeve strane:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2}\right) \geqslant \sqrt{\frac{1}{a^2b^4c^2}} = \frac{1}{ab^2c} = (\text{jer je } abc = 1) = \frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2}\right) \geqslant \sqrt{\frac{1}{b^2c^4a^2}} = \frac{1}{bc^2a} = (\text{jer je } abc = 1) = \frac{1}{c},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right) \geqslant \sqrt{\frac{1}{c^2a^4b^2}} = \frac{1}{ca^2b} = (\text{jer je } abc = 1) = \frac{1}{a}.$$

Kada zbrojimo sve lijeve i sve desne strane nejednakosti, dobijemo

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \geqslant 1\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Zato sumnjamo da je $m = 1$. Dakle, trebamo pokazati

- $m = 1$ ima svojstvo (tj. početna nejednakost vrijedi kada uvrstimo $m = 1$) – to smo pokazali
- $m = 1$ je najveći s tim svojstvom, ili lakše, nijedan broj veći od 1 nema to svojstvo.

Za drugi dio (vidi napomenu u nastavku), dovoljno je naći samo jedan primjer brojeva a, b, c takvih da početna nejednakost ne bude zadovoljena za $m > 1$. Za to nam pomažu nejednakosti koje smo primjenjivali i slučaji jednakosti koje se postižu. Znamo da se u AG nejednakosti slučaj jednakosti postiže kad su izrazi na koje primjenjujemo nejednakost jednaki. U našem slučaju: $a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2$. Sami provjerite da je to ekvivalentno s $a = b = c = 1$. Pa, uvrstimo li taj slučaj u početnu nejednakost, dobit ćemo:

$$1 + 1 + 1 \geqslant m(1 + 1 + 1) \implies m \leqslant 1.$$

Dakle, m je uistinu najveći takav broj, i dokaz je gotov.

Opet može biti nejasan drugi dio dokaza. Dakle, po prvom dijelu dokaza, mi smo dokazali da je $m = 1$ jedan kandidat za rješenje. Također, implicitno, vidi se i da su svi brojevi $m \leqslant 1$ kandidati za rješenje, jer je

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \geqslant \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

gdje smo na kraju iskoristili samo nejednakost $m \leqslant 1$. Dakle, zasad je skup svih mogućih realnih brojeva m za koji vrijedi početna nejednakost $\langle\infty, 1]$. Postavlja se pitanje, postoji li još neki broj, veći od jedan u tom skupu. Želimo dokazati da je

Za sve brojeve m veće od 1 početna nejednakost nije zadovoljena za bar jedan primjer brojeva $a, b, c > 0,\ abc = 1.$

(Sjetimo se: kod negiranja tvrdnji koje sadrže "svi", "za svaki", ti izrazi se mijenjaju u "postoji", "neki".) To možemo napasti metodom kontradikcije:

Pretpostavimo da postoji $m_0 > 1$ takav da je početna nejednakost zadovoljena za sve $a, b, c > 0,\ abc = 1.$

Kako je nejednakost zadovoljena za sve $a, b, c > 0,\ abc = 1$, onda je zadovoljena i za trojku brojeva $a = b = c = 1$. (Budite oprezni: ovdje vrijedi samo implikacija, ali ta implikacija nam je i potrebna.) Sada uvrstimo kao i pri kraju rješenja:

$$1 + 1 + 1 \geqslant m_0(1 + 1 + 1) \implies m_0 \leqslant 1.$$

Dakle, dobili smo da je $m_0 \leqslant 1$. Kako smo pretpostavili da je $m_0 > 1$, dobili smo kontradikciju, dakle naša tvrdnja je dokazana.

Uistinu je skup svih mogućih brojeva m jednak $\langle\infty, 1]$. Jasno je da je najveći među njima $m = 1$.

Još jedan kratki savjet: pri dokazivanju da je $m = 1$ najveći, uvrstili smo brojeve $a = b = c = 1$. Općenito je recept u zadatcima ovakvog tipa da se uvrštavaju oni brojevi za koje se postigne jednakost u nejednakostima koje smo primjenjivali.

Zadatci

Budući da je svrha ovog predavanja pokazati neke osnovne ideje (i greške) u matematičkim dokazima, ne postoje specifični zadatci vezani uz ovo predavanje. Zato sljedeći zadatci obuhvaćaju različite teme iz matematike i služe vama kao vježba dokazivanja i provjera koliko ste shvatili ideje koje su ovim predavanjem obuhvaćene. U zadatcima u kojima trebate nešto dokazati dana je uputa za dokaz, a od vas se očekuje da provedete cjelovit dokaz.

Zadatak 9.
Dokažite da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Rješenje.
Uputa: provedite dokaz metodom kontradikcije. Pretpostavite suprotno, tj. da prostih brojeva ima konačno mnogo i označite te brojeve s p_1, p_2, ..., p_n. Zatim promotrite broj $P = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ i pokažite kako on nije djeljiv ni s jednim od brojeva p_1, p_2, ..., p_n. Gdje se u ovom dokazu nalazi kontradikcija?

Također, je li broj P prost? Dobro razmislite o ovome.

Zadatak 10.
Promotrite sljedeći niz jednakosti:

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = 1 - \sqrt{3}.$$

Uočite da je izraz na početku pozitivan broj, dok je izraz na kraju negativan broj. Gdje je greška u računu?

Zadatak 11.
Ako su u trokutu dva kuta jednake veličine, dokažite da su stranice nasuprot tim kutovima jednake duljine. Vrijedi li obrat ove tvrdnje?

Rješenje.
Uputa: povucite visinu na stranicu koja leži uz oba ta kuta i primijenite odgovarajući poučak o sukladnosti trokuta. Obrat ove tvrdnje dokazuje se analogno.

Zadatak 12.
Dokažite obrat Pitagorinog poučka: ako za duljine a, b, c stranica trokuta ABC vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, onda je taj trokut pravokutan.

Rješenje.
Uputa: promotrite pravokutan trokut $A'B'C'$ za koji vrijedi $|B'C'| = a$ i $|A'C'| = b$. Primijenite Pitagorin poučak na taj trokut i primjenom odgovarajućeg poučka o sukladnosti trokuta pokažite da su trokuti ABC i $A'B'C'$ sukladni.

Zadatak 13.
Uzmimo proizvoljan skup od konačno mnogo dužina u ravnini. Matematičkom indukcijom ćemo pokazati da sve dužine u tom skupu imaju jednaku duljinu.

- *Baza:* u jednočlanom skupu očito sve dužine imaju jednaku duljinu.
- *Pretpostavka:* pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. da u skupu od n dužina sve dužine imaju jednaku duljinu.
- *Korak:* uzmimo neki skup $\mathcal{S}$ od $n + 1$ dužine. Izbacimo jednu dužinu iz $\mathcal{S}$, nazovimo ju $\overline{AB}$. Tako dobiveni skup $\mathcal{S}'$ ima n dužina, pa prema pretpostavci indukcije sve dužine u tom skupu imaju jednaku duljinu. Izbacivanjem neke dužine iz skupa $\mathcal{S}'$, dodavanjem dužine $\overline{AB}$ i ponovnom primjenom pretpostavke indukcije vidimo kako i dužina $\overline{AB}$ ima jednaku duljinu kao i sve ostale dužine iz $\mathcal{S}'$. Dakle, sve dužine u skupu $\mathcal{S}$ imaju jednaku duljinu.

Ovime je korak indukcije dokazan, pa tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. u svakom skupu od konačno mnogo dužina u ravnini, sve su dužine jednake duljine.
Gdje je greška u ovom dokazu?

Zadatak 14.
Za kraj vam umjesto "klasičnog" zadatka dajemo otvoreni problem za razmišljanje i istraživanje. U dosadašnjim online predavanjima napravljen je velik broj dokaza, što u postavljenim zadatcima, što dokaza teorema i raznih drugih tvrdnji. Pokušajte u tim dokazima naći dokaze koji se temelje na kontradikciji i dokaze ekvivalencija i u svakom dokazu odredite što su pretpostavke dokaza, što dokazna tvrdnja i kako je točno dokazana. Za one koji su voljni malo više istraživati, uz pomoć literature i Interneta pronađite još neke slične primjere dokaza poznatih tvrdnji u matematici i analizirajte ih na gore opisani način.