Invarijante

6.12.2015.

Uvod/teorijske osnove

U nekim se zadatcima susrećemo sa sustavom koji se mijenja po određenim pravilima. U takvim je zadatcima često korisno potražiti neku veličinu koju ta pravila ne mijenjaju. Takvu veličinu, koja se ne mijenja nikakvom dozvoljenom promjenom sustava, zovemo **invarijanta**.

Primjer 1. *Na ploči pišu tri broja:* $1, 2, 3$. *Franjo igra igru - svake minute obriše sva tri broja te na mjesto prvoga upiše dvostruki prvi umanjen za drugi, na mjesto drugoga dvostruki drugi umanjen za treći, te na mjesto trećega dvostruki treći umanjen za prvi. Hoće li Franjo ikada napisati* $4, 5, 6$*?*

Rješenje. Želimo pronaći nešto što se ne mijenja, da si to olakšamo, prvo zapišimo što se točno događa malo više matematički. Ako na ploči pišu brojevi (a, b, c), Franjo će iduće napisati brojeve $(2a - b, 2b - c, 2c - a)$. Sada, gledajući ovako napisanu promjenu, i uz malo ručnog isprobavanja, možemo primijetiti da se zbroj sva tri broja nikada ne mijenja jer vrijedi:

$$2a - b + 2b - c + 2c - a = a + b + c.$$

Sada je jasno da se nikada neće pojaviti brojevi $4, 5, 6$ jer je suma na početku 6, pa će takva i ostati.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Marin je odlučio igrati sljedeću igru. Napisao je brojeve $(2, 3)$ na ploču, i može ih mijenjati na sljedeće načine: može zamijeniti (x, y) s $(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}y, \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y)$, ili s $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$, ili s (y, x). Može li Marin ikada doći do brojeva $(\frac{5}{6}, \frac{11}{8})$?

Zadatak 2.
Na ploči pišu brojevi $1, 2, 3, ..., 100$. Lucija može obrisati neka dva broja i zamijeniti ih njihovom razlikom. Je li moguće da na kraju na ploči piše samo broj 1?

Zadatak 3.
Zmaj ima 100 glava. Možemo mu odsjeći neke od glava, ali će mu ih onda još izrasti.

- Ako odsječemo 2 glave, izrast će ih 14.
- Ako odsječemo 15 glava, neće izrasti nijedna nova.
- Ako odsječemo 21 glavu, izrast će 3.
- Ako odsječemo 8 glava, izrast će ih 11.

Možemo li zmaju odsjeći sve glave?

Zadatak 4.
Na ploči pišu brojevi od 1 do 10^{2015}. Kristijan svaku minutu obriše sve brojeve i umjesto svakog napiše zbroj njegovih znamenaka. To ponavlja dok ne ostanu samo jednoznamenkasti brojevi. Ima li na ploči više brojeva 1 ili 2?

Zadatak 5.
Na otoku se nalazi 12 crvenih kameleona, 14 plavih i 16 crvenih. Kada se sretnu dva kameleona različitih boja, oba promijene boju u onu treću. Može li se dogoditi da svi kameleoni postanu iste boje?

Zadatak 6.
Na ploči piše nekoliko slova M i nekoliko slova N. Iva može obrisati dva slova i zamijeniti ih jednim na sljedeći način: ako je obrisala dva ista slova, zamijenit će ih slovom M, a ako je obrisala dva različita, zamijenit će ih slovom N. Dokažite da je zadnje slovo na ploči određeno početnim brojem slova, a ne Ivinim izborom redoslijeda.

Zadatak 7.
Na uređeni par (x, y) možemo primijeniti sljedeće promjene:

$$(x, y) \mapsto (x + 2y, y - 4x),$$

$$(x, y) \mapsto (x - 6y, 5y - 2x),$$

$$(x, y) \mapsto (y, x).$$

Ako počinjemo od para $(2, 6)$, možemo li dobiti $(4, 3)$?

Zadatak 8.
Imamo normalno obojenu šahovsku ploču. Vlatka može promijeniti boje svih polja u stupcu ili u retku. Može li Vlatka doći do ploče koja ima samo jedno crno polje?
Vlatko može promijeniti boju polja u bilo kojem 2×2 kvadratu. Može li on doći do ploče sa samo jednim crnim poljem?
Mogu li zajedno?

Zadatak 9.
Petar je u 3×3 tablicu napisao redom brojeve $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (dakle, u prvom su redu brojevi $1, 2, 3$ i tako dalje). Može li samo dodavanjem i oduzimanjem jedinica susjednim brojevima doći do tablice u kojoj redom pišu brojevi $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$?

Zadatak 10.
Tri skakavca stoje u tri vrha kvadrata. Svake sekunde jedan od skakavaca odabere nekog od druga dva i preskoči u točku centralno simetrično od sebe s obzirom na odabranog. Može li se dogoditi da neki od njih skoči u četvrti vrh kvadrata?

Zadatak 11.
Vedrana ima 10×10 ploču takvu da su donji desni i gornji lijevi 5×5 kvadrat popunjeni žetonima tako da je na svakom polju točno jedan žeton. Vedrana može s jednim žetonom "preskočiti" drugi (ali ne može preskočiti više od jednog žetona odjednom). Može li Vedrana preseliti sve žetone u gornji lijevi i donji desni 5×5 kvadrat?

Zadatak 12.
U krugu piše 2015 nula i jedna jedinica. U jednom koraku Gabriela može dodati 1 na tri uzastopna broja na krugu. Može li Gabriela postići da svi brojevi postanu jednaki?

Zadatak 13.
Maja uzima uređene parove realnih brojeva i transformira ih na jedan od sljedećih načina:

$$(x, y) \mapsto (0.6x + 0.8y, 0.8x - 0.6y),$$

$$(x, y) \mapsto (y, x).$$

Može li Maja, počevši s parom $(2, 3)$, uzastopnom primjenom gornjih transformacija dobiti par $(1, 4)$?

Zadatak 14.
Mihael je napisao broj 2014^{2015} na ploču. Nakon toga obrisao je najljeviju znamenku i prirojio ju broju (dakle, da je počeo brojem 217, dobio bi $17 + 2 = 19$). Taj postupak ponavlja dok ne dobije deseteroznamenkasti broj. Dokažite da su u tom broju neke dvije znamenke međusobno jednake.

Zadatak 15.
Zadani su brojevi $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. U svakom koraku možemo dva broja zamijeniti njihovim zbrojem, odnosno razlikom podijeljenom brojem $\sqrt{2}$. Možemo li nakon nekoliko koraka doći do brojeva $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?

Zadatak 16.
Daniel ima vrt oblika 10×10 polja. Na nekim poljima raste korov. Svaki dan, korov će se proširiti na susjedno polje ako su barem dva susjedna polja već zarasla korovom (dva polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu). Ako je prvi dan ukupno devet polja obraslo korovom, može li se dogoditi da cijeli Danielov vrt na kraju bude prekriven korovom?

Zadatak 17.
Nekoliko prirodnih brojeva zapisano je u red. Ivana u svakom potezu uzme par susjednih brojeva x i y takvih da je $x > y$ i da se x nalazi lijevo od y, te zamjenjuje par (x, y) jednim od parova $(y+1, x)$, $(x-1, x)$. Dokažite da će Ivana napraviti samo konačno mnogo ovakvih poteza.

Zadatak 18.
Nad zadanim mnogokutom u ravnini dopuštena je sljedeća operacija: *odrežemo* dio mnogokuta, *zrcalimo* ga te ga *slijepimo* nazad po istoj stranici po kojoj smo ga *odrezali*. Možemo li, počevši od jednakostraničnog trokuta, doći do kvadrata?

Rješenja nekih zadataka

Rješenje zadatka 1. Promatrat ćemo zbroj brojeva. To je prilično česta invarijanta, pa je prirodno provjeriti je li to invarijanta i za ovaj sustav. Zaista, nakon svake transformacije, zbroj brojeva ostaje isti. Zato, uspoređivanjem prvog i zadnjeg para, vidimo da se ne može doći od jednog do drugog.

Rješenje zadatka 2 . Promatrajmo parnost brojeva na ploči.
Ako Lucija uzme dva parna broja, dobiva jedan novi paran broj.
Ako uzme dva neparna, opet dobiva paran broj.
Ako uzme paran i neparan broj, dobiva neparan.
Dakle, broj neparnih brojeva na ploči se ili ne mijenja ili smanjuje za 2. Naša invarijanta onda će biti parnost broja neparnih brojeva. Na početku imamo njih 50, to jest parno. Kada bi zadnji broj bio 1, to bi značilo da je ostao samo jedan paran broj, što je nemoguće budući da ih je u svakom koraku parno.

Rješenje zadatka 3. Zapišimo promjene koje se događaju u svakom od mogućih sječenja glava.
U prvom slučaju ukupna je promjena 12.
U drugom -15.
U trećem -18.
U četvrtom 3.
Sada se lagano vidi da, što god da napravimo, broj glava se mijenja za neki broj djeljiv s 3. To znači da broj preostalih glava pri dijeljenju s 3 daje isti ostatak. Kako 100 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3 te svaki preostali broj glava prilikom sječenja također daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3, a broj 0 daje ostatak 0 pri dijeljenju s 3, zmaju nikada ne možemo odsjeći sve glave.

Rješenje zadatka 4. Zamjena je broj $\rightarrow$ zbroj znamenaka. Najjednostavnije svojstvo koje se ne mijenja u toj promjeni je ostatak pri djeljenju s 3. No problem je u tome što iz samog ostatka pri dijeljenju s 3 početnog broja ipak ne znamo koji ćemo jednoznamenkasti broj dobiti (npr. za broj koji je djeljiv s 3 možemo dobiti 3, 6 ili 9). Zato ćemo za invarijantu u ovom zadatku radije uzeti ostatak pri dijeljenju s 9.
Jasno je da je ostatak pri dijeljenju s 9 početnog broja točno onaj broj koji ćemo dobiti na kraju (osim u slučaju kada je ostatak nula, tada brojevi koji su djeljivi s 9 daju broj 9 na kraju). Dakle, pitanje je zapravo ima li više brojeva koji daju ostatak 1 ili 2 pri dijeljenju s 9, a tu je jasno da je odgovor da je više brojeva koji daju ostatak 1.

Rješenje zadatka 5. Pogledajmo ukupne promjene svake vrste kameleona u svakom susretu. Dvije vrste se smanje za po 1, a treća poveća za 2. Htjeli bismo da su svima promjene iste, tako da tražimo nešto takvo da oduzimanje 1 i dodavanje 2 budu ista stvar. To su primjerice ostatci pri dijeljenju s 3. Dakle, u svakom se susretu ostatak pri dijeljenju broja pripadnika svake vrste s 3 promijeni, i to tako da se poveća točno za dva. Primijetimo i da su na početku ostatci pri djeljenju s 3 broja pripadnika svake vrste međusobno različiti, pa će takvi i ostati. Dakle, ne može se dogoditi da dvije vrste dođu do 0 pripadnika, jer bi tada davale isti ostatak.

Rješenje zadatka 6. Zamislimo da umjesto slova M piše 1, a umjesto slova N piše -1, a umjesto brisanja dva broja množimo. Sada vidimo da je umnožak svih brojeva invarijantan i da je posljednji broj stvarno neovisan o redosljedu.

Rješenje zadatka 7. Primijetimo da je očuvan broj parnih brojeva. Naime, u prve dvije dozvoljene operacije parnost se ponaša po sljedećem pravilu: (ako s P označimo parni, a s N neparni) $(P, P) \to (P, P)$, $(P, N) \to (P, N)$, $(N, P) \to (N, P)$, $(N, N) \to (N, N)$. U trećoj se operaciji parnost ponaša po sljedećem pravilu: $(P, P) \to (P, P)$, $(P, N) \to (N, P)$, $(N, P) \to (P, N)$, $(N, N) \to (N, N)$. Stoga je broj parnih brojeva u uređenom paru invarijantan s obzirom na dozvoljene transformacije. Kako na početku imamo dva parna broja, a na kraju bismo trebali imati jedan paran broj, zaključujemo da nije moguće dobiti zadani uređeni par.

Rješenje zadatka 8. Promotrimo razliku crnih i bijelih polja modulo 4. Modulo znači "ostatak pri djeljenju s", i moći ćete nastaviti čitati ovo rješenje bez da znate nešto više o tome, no preporučamo da pogledate predavanje iz kongruencija prije nego nastavite raditi teže zadatke. Na početku je 0, a na kraju je 2. Ako pokažemo da je to invarijanta i Vlatkinog i Vlatkovog poteza, dokazat ćemo da traženi cilj nije moguć čak niti ako igraju skupa. Ako s uređenim parom (x, y) označimo da ima x crnih polja u redu ili stupcu, a s y broj bijelih, vrijedi $x + y = 8 \equiv 0 \pmod 4$, te za Vlatkino preslikavanje vrijedi $(0, 0) \to (0, 0)$, $(1, 3) \to (3, 1)$, $(2, 2) \to (2, 2)$, $(3, 1) \to (1, 3)$. Vidimo da je razlika modulo 4 očuvana. Slično, ako sad s (x, y) označimo broj crnih i bijelih polja u danom kvadratu 2×2, slično je $x + y = 4 \equiv 0 \pmod 4$, pa za Vlatkovo preslikavanje opet vrijedi $(0, 0) \to (0, 0)$, $(1, 3) \to (3, 1)$, $(2, 2) \to (2, 2)$, $(3, 1) \to (1, 3)$. Opet, vidimo da je razlika modulo 4 očuvana, čime je dokazano da do zadane situacije nije moguće doći.

Rješenje zadatka 9. Promatramo parnost sume svih brojeva. Na početku je suma 45, a na kraju 54. Suma se u svakom potezu ili poveća ili smanji za 2, dakle parnost sume se ne mijenja, odnosno, ne možemo doći do tražene konfiguracije u tablici.

Rješenje zadatka 10. Uvedimo koordinatni sustav. Neka su bez smanenja općenitosti vrhovi kvadrata na kojima su skakavci $(0, 1), (1, 0), (1, 1)$. Četvrti vrh kvadrata je $(0, 0)$. Primijetimo da se skokom s koordinata (a, b) preko koordinate (c, d) ta koordinata zamjenjuje s $(a + 2(c - a)), (b + 2(d - b))$. Dakle, parnost pojedine komponente koordinate ne mijenja se kroz igru. Nikako ne možemo postići da su obje koordinate parne kao kod koordinate $(0, 0)$.

Rješenje zadatka 11. Obojimo ploču šahovski tako da je gornje lijevo polje obojano u crno. Na početku je broj žetona na crnim poljima 26 a na kraju 24. Ako sa žetonom na bijelom polju preskočimo žeton na crnom, broj žetona na crnim poljima se ne mijenja. Slično, ako sa žetonom na bijelom polju preskočimo žeton na crnom polju, opet se broj žetona na crnim poljima ne mijenja. Dakle, broj žetona na crnim poljima invarijanta je ovog preslikavanja, pa nije moguće od početne konfiguracije doći do završne.

Rješenje zadatka 12. U krugu je ukupno 2016 brojeva. Cijelo vrijeme pri dijeljenju s 3 suma brojeva daje ostatak 1. Ako su na kraju svi brojevi jednaki x, ukupna suma brojeva je $2016x$, što je djeljivo s 3. Kontradikcija.

Rješenje zadatka 13. Uvedimo funkciju dvije varijable $f(x, y) = x^2 + y^2$ Vidimo da se primjenom dane transformacije za svaki fiksni početni par realnih brojeva (x, y) vrijednost funkcije f ne mijenja. Dakle, nužan uvjet da Maja dođe na pravo mjesto je da vrijedi $2^2 + 3^2 = 1^2 + 4^2$. To ne vrijedi.

Rješenje zadatka 14. Hint: pri dijeljenju s 9 zbroj znamenaka daje isti ostatak kao i broj.

Rješenje zadatka 15. Hint: suma kvadrata.

Rješenje zadatka 16. Hint: U ovom zadatku zapravo se koristi monovarijanta. Pogledajte opseg lika određenog korovom.

Rješenje zadatka 17. Također monovarijanta. Neka je zapisani niz brojeva zapravo jedan broj u brojevnoj bazi koja je za jedan veća od najvećeg broja u nizu. Početne brojeve sad smatramo znamenkama. Čitajmo taj broj zdesna nalijevo! Primijetimo da svakom zadanom promjenom naš broj strogo raste, ali može postići samo konačno mnogo različitih vrijednosti (nijedna znamenka našeg broja ne može biti od početno najveće znamenke koju imamo u nizu). Dakle, proces staje.

Rješenje zadatka 18. Hint: Opseg i površina su dvije invarijante ove transformacije.