MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Uvod u nejednakosti

13.12.2015.

Nejednakosti su područje koje je u velikoj mjeri zastupljeno na matematičkim natjecanjima, ali se u srednjoškolskom gradivu jedva spominje. Takvi zadatci mogu stvarati probleme onima koji se ne bave matematikom izvan redovne nastave, a pojavljuju se podjednako na natjecanjima za sve razrede, pa ih je zato vrlo važno znati. Metode kojima se rješavaju kreću se od onih najjednostavnijih ($x^2 \geqslant 0$) pa do korištenja vrlo kompliciranih nejednakosti za koje se od učenika koji ih primjenjuju ne očekuje da ih znaju dokazati.

Svođenje na kvadrat

Prva metoda rješavanja ovih zadataka u teoriji je vrlo jednostavna, ali primjeri će pokazati da se korištenjem te nejednakosti mogu riješiti i kompliciraniji zadaci. Primjenom nejednakosti $x^2 \geqslant 0$ na različite izraze može se riješiti iznenađujuće mnogo zadataka. Kroz sljedećih nekoliko primjera i zadataka proći ćete osnovne ideje koje bi trebale biti dovoljne za rješavanje većine zadataka ovog tipa. Rješenja zadataka priložena su na kraju dokumenta, ali svakako se preporuča da ih prije gledanja u rješenja pokušate samostalno riješiti. Zadaci koji su u kategoriji Zadaci za samostalan rad nemaju rješenja, jer se od vas očekuje da ih samostalno riješite.

Primjer 1.
Dokažite da za realne brojeve a, b vrijedi:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$

Kod zadataka ovog tipa uvijek je korisno prvo nejednakost zapisati u ekvivalentnom obliku koji s desne strane nejednakosti ima 0. Dana nejednakost ekvivalentna je s $a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$. Primjenom formule za kvadrat binoma dana nejednakost poprima oblik $(a - b)^2 \geqslant 0$. Budući da je $x^2 \geqslant 0$ za svaki x, pa onda i za $x = a - b$, dobivena je nejednakost točna, a kako je ona ekvivalentna početnoj, zaključujemo da je $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

Primjer 2.
Dokažite da za realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \geqslant ab - bc + ca$$

Ponovno zapišimo nejednakost u ekvivalentnom obliku koji s desne strane nejednakosti ima 0. Kod ovog primjera također ćemo se zbog lakšeg računanja riješiti nazivnika množenjem cijelog izraza s 2. Tako dolazimo do $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca \geqslant 0$. Potrebno je još jedino primijeniti formulu za kvadrat trinoma te dolazimo do nejednakosti koja je ekvivalentna početnoj, a oblika je $x^2 \geqslant 0$, odnosno $(-a + b + c)^2 \geqslant 0$.

Primjer 3.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \geqslant 6abc$$

Kao i u prva dva primjera, danu nejednakost pokušat ćemo svesti na nejednakost $x^2 \geqslant 0$, kako bismo to postigli, prvi je korak rješavanje zagrada iz zadatka. Tako dobivamo nejednakost ekvivalentnu početnoj: $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 - 6abc \geqslant 0$. Treba uočiti da je $-6abc = -2abc - 2abc - 2abc$. Takav nam je rastav korisniji jer se izlučivanjem a iz drugog i petog člana dobiva $a\left(b^2 + c^2\right) - 2abc = a\left(b^2 - 2bc + c^2\right)$. Sada treba iskoristiti uvjet zadatka, a to je da su $a, b, c > 0$, pa iz toga slijedi da je $a(b - c)^2 \geqslant 0$. Postupimo li analogno i s ostalim članovima, dobivamo nejednakost koja je ekvivalentna početnoj: $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geqslant 0$. Preostaje još zaključiti kako je dobivena nejednakost točna jer zbrajanjem izraza većih od 0 dobivamo izraz koji je također veći od 0.

Kod rješavanja sličnih zadataka često ćemo početnu nejednakost transformirati do neke druge za koju će tvrdnja vrijediti. Prilikom takvih transformacija nužno je u svakom koraku provjeriti i naglasiti da je nova nejednakost ekvivalentna (oznaka $\Leftrightarrow$) početnoj, jer u suprotnom iz konačnog izraza za koji ustanovimo da vrijedi ne mora slijediti tvrdnja zadatka.

Zanimljivo se također pitati kada vrijedi znak jednakosti. Ponekad se u zadacima naglasi da je potrebno i to odrediti, ali čak i kad to u zadatku nije naglašeno, preporuča se da napišete jer se zbog toga znaju skidati bodovi. Tako u Primjeru 1 jednakost vrijedi za $a = b$, u Primjeru 2 jednakost vrijedi za $a = b + c$, a u Primjeru 3 jednakost vrijedi za $a = b = c$.

Zadatci

Zadatak 1.
Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da je $a + d = b + c$. Dokažite da vrijedi:

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geqslant 0$$

Zadatak 2.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geqslant \frac{3}{4}$$

Zadatak 3.
Dokažite da za realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$$

Zadatak 4.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leqslant 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right)$$

Zadatak 5.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$\sqrt{abc} \cdot \left(\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}\right) \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Zadatci za samostalan rad

Zadatak 6.
Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $ab + bc + ca = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 1$$

Zadatak 7.
Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geqslant \frac{3}{4}$$

Zadatak 8.
Dokažite da za realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right) \geqslant \left(a^3 + b^3\right)^2$$

Nejednakosti među sredinama

Nejednakosti među sredinama su možda i najvažnije nejednakosti s kojima ćete se susresti. Zadatci na srednjoškolskim natjecanjima uvijek se mogu riješiti njihovim korištenjem, dok poznavanje nekih kompliciranijih nejednakosti može biti korisno, ali nije i nužno. Dokazi ovih nejednakosti su dosta komplicirani te ih u ovom trenutku ne navodimo.

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi. Tada je njihova:

harmonijska sredina

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}},$$

geometrijska sredina

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n},$$

aritmetička sredina

$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n},$$

kvadratna sredina

$$K = \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2}{n}}.$$

Nejednakosti među sredinama odnose se na činjenicu da za ovako definirane sredine vrijedi

$$K \geqslant A \geqslant G \geqslant H,$$

a najčešće se koristi $A \geqslant G$. Jednakost se postiže za $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Primjer 4.
Dokažite da za realne brojeve a, b vrijedi:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$

Prvo je potrebno uočiti da se $A - G$ nejednakost može primijeniti na $x_1 = a^2, x_2 = b^2$ za $a \neq 0, b \neq 0$, jer su tada x_1, x_2 pozitivni realni brojevi. Za $a = 0$, dana se nejednakost svodi na $b^2 \geqslant 0$, što vrijedi, a za $b = 0$ dobije se analogno. Sada možemo primijeniti $A - G$ nejednakost iz koje dobivamo $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2 \cdot b^2} = ab$. Množenjem dobivene nejednakosti s 2 dobivamo tvrdnju zadatka: $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Jednakost vrijedi za $a^2 = b^2$, odnosno, budući da su a, b pozitivni realni brojevi, za $a = b$.

Primjer 5.
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$a + b + c \geqslant 9$$

Budući da su a, b, c pozitivni realni brojevi, možemo primjenjivati nejednakosti među sredinama. Zbog uvjeta zadatka najprirodnije je primijeniti $A - H$ nejednakost. $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Primjenom uvjeta zadatka i množenjem dobivene nejednakosti s 3 dolazimo do tražene nejednakosti: $a + b + c \geqslant 9$. Jednakost vrijedi za $a = b = c$.

Primjer 6.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

Ideja u rješavanju ovog zadatka je prvo transformirati danu nejednakost u oblik na koji će se jednostavnije primijeniti nejednakosti među sredinama. Kako bismo mogli efikasno primijeniti $A - H$ nejednakost, dodat ćemo lijevoj i desnoj strani nejednakosti 3. Tako dobivamo

$$\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geqslant \frac{9}{2}$$

odnosno

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}$$

Izlučivanjem $a+b+c$ i množenjem s 2 dobivamo nejednakost ekvivalentnu početnoj:

$$(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geqslant 9$$

Uočite da sada tvrdnja zadatka slijedi izravno primjenom $A-H$ nejednakosti na $x_1=a+b, x_2=b+c, x_3=c+a$, jer je dobivena nejednakost ekvivalentna s

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}$$

Jednakost vrijedi za $a+b=b+c=c+a$, odnosno za $a=b=c$.

Kao što se vidi iz Primjera 1, odnosno Primjera 4, mnoge je nejednakosti moguće riješiti na više načina. Tako se i Primjer 5 može riješiti primjenom $A-G$ nejednakosti.

Zbog uvjeta zadatka vrijedi:

$$a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$$

Primjenom $A-G$ nejednakosti na svaku od zagrada dolazimo do nejednakosti $(a+b+c)\geqslant 3+2+2+2=9$.

Nejednakost iz Primjera 6 naziva se **Nesbittova nejednakost** i postoji mnogo različitih dokaza ove nejednakosti.

Zadatci

Zadatak 9.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi:

$$a\left(a-\sqrt{bc}\right)+b\left(b-\sqrt{ca}\right)+c\left(c-\sqrt{ab}\right)\geqslant 0$$

Zadatak 10.
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc=1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a-1}{b+1}+\frac{b-1}{c+1}+\frac{c-1}{a+1}\geqslant 0$$

Zadatak 11.
Dokažite da za duljine stranica trokuta a, b, c vrijedi:

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Zadatak 12.
Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ realni brojevi i n prirodan broj, $n>1$ takvi da je $a_1\cdot a_2=a_2\cdot a_3=..=a_{n-1}\cdot a_n=a_n\cdot a_1=1$. Dokažite da vrijedi:

$${a_1}^2+{a_2}^2+...+{a_n}^2\geqslant n$$

Zadatak 13.
Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ realni brojevi i n prirodan broj, $n>1$ takvi da je $a_1+a_2+...+a_n=s$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+...+\frac{a_n}{s-a_n}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

Zadatci za samostalan rad

Zadatak 14.
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}$$

Zadatak 15.
Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ realni brojevi i n prirodan broj, $n > 1$ takvi da je $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + ... + \frac{a_n}{2-a_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}$$

Zadatak 16.
Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ realni brojevi i n prirodan broj takvi da je $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + ... + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geqslant \frac{\left(1+n^2\right)^2}{n}$$

Malo teži zadatci

Zadatak 17.
Neka su $0 < a, b, c < 1$ takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \leqslant \frac{3}{2}$$

Zadatak 18.
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc \leqslant 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant a + b + c$$

Rješenja zadataka

Rješenje zadatka 1. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \\
&2ac + 2bd - 2ad - 2bc \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \\
&-d(a-b) + c(a-b) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\text{(korištenjem uvjeta zadatka)} \\
&(a-b)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi za $a = b$.

Rješenje zadatka 2. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geqslant \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \\
&4a^2(b+c) + 4b^2(c+a) + 4c^2(a+b) \geqslant 3(a+b)(b+c)(c+a) \quad \Leftrightarrow \\
&a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geqslant 6abc \\
&\text{(za nastavak vidi Primjer 3.)}
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 3. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca \quad \Leftrightarrow\\
&2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ca \quad \Leftrightarrow\\
&a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow\\
&(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi za $a=b=c$.

Rješenje zadatka 4. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \leqslant 2\left(a^3+b^3+c^3\right) \quad \Leftrightarrow\\
&2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow\\
&a^2(a-b)+a^2(a-c)+b^2(b-c)+b^2(b-a)+c^2(c-a)+c^2(c-b) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow\\
&(a-b)\left(a^2-b^2\right)+(b-c)\left(b^2-c^2\right)+(c-a)\left(c^2-a^2\right) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow\\
&(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a) \geqslant 0
\end{aligned}$$

što vrijedi zbog uvjeta zadatka. Jednakost vrijedi za $a=b=c$.

Rješenje zadatka 5. Budući da je

$$\sqrt{abc}\cdot\left(\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\right) \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{abc}(2(b+c)(c+a)+2(c+a)(a+b)+2(a+b)(b+c)) \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(a+b)(b+c)(c+a) \quad \Leftrightarrow$$

nakon izmnažanja i faktoriziranja dobivamo

$$\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2(a^2+ab+bc+ca)+\sqrt{b}(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2(b^2+bc+ca+ab)+\sqrt{c}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(c^2+ca+ab+bc) \geqslant 0$$

što vrijedi zbog uvjeta zadatka. Jednakost vrijedi za $a=b=c$.

Rješenje zadatka 9. Zbog $A-G$ nejednakosi vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{ab} \geqslant -\frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow\\
&\frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{bc} \geqslant -\frac{b+c}{2} \quad \Leftrightarrow\\
&\frac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ca} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{ca} \geqslant -\frac{c+a}{2} \quad \Leftrightarrow\\
&a(a-\sqrt{bc})+b(b-\sqrt{ca})+c(c-\sqrt{ab}) \geqslant a\left(a-\frac{b+c}{2}\right)+b\left(b-\frac{c+a}{2}\right)+c\left(c-\frac{a+b}{2}\right) \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Budući da je nejednakost

$$a\left(a-\frac{b+c}{2}\right)+b\left(b-\frac{c+a}{2}\right)+c\left(c-\frac{a+b}{2}\right) \geqslant 0$$

ekvivalentna s

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

tvrdnja slijedi po Zadatku 3

Rješenje zadatka 10. Zbog $A-G$ nejednakosti vrijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{a-1}{b+1}+\frac{b-1}{c+1}+\frac{c-1}{a+1} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow\\
&(a+1)(b^2-1)+(b+1)(c^2-1)+(c+1)(a^2-1) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow\\
&ab^2+bc^2+ca^2+a^2+b^2+c^2-a-b-c \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Nejednakost u ovom obliku je dosta nezgodna za primjenu nejednakosti među sredinama, budući da su neki od članova negativni. Zato ćemo je transformirati u sljedeći oblik:

$$ab^2+bc^2+ca^2+(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+a+b+c \geqslant 6.$$

Sada možemo odvojeno promatrati dvije nejednakosti koje u sumi daju traženu.

$$\begin{aligned}
&(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geqslant 0\\
&\frac{ab^2+bc^2+ca^2+a+b+c}{6} \geqslant \sqrt[6]{ab^2\cdot bc^2\cdot ca^2\cdot a\cdot b\cdot c}
\end{aligned}$$

Zbog uvjeta zadatka, slijedi $ab^2+bc^2+ca^2+a+b+c \geqslant 6$. Jednakost vrijedi za $a=b=c=1$.

Rješenje zadatka 11. Uvjet da su a,b,c stranice trokuta znači da je $a<b+c, b<c+a, c<a+b$, odnosno da je $a+b-c>0, b+c-a>0, c+a-b>0$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}=\\
&\frac{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}}{2}+\frac{\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}}{2}+\frac{\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}}{2}.
\end{aligned}$$

Primjenom $A-K$ nejednakosti na svaki od izraza, dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}}{2} &\leqslant \sqrt{\frac{(\sqrt{a+b-c})^2+(\sqrt{b+c-a})^2}{2}}=\sqrt{b}\\
\frac{\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}}{2} &\leqslant \sqrt{\frac{(\sqrt{b+c-a})^2+(\sqrt{c+a-b})^2}{2}}=\sqrt{c}\\
\frac{\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c}}{2} &\leqslant \sqrt{\frac{(\sqrt{c+a-c})^2+(\sqrt{a+b-c})^2}{2}}=\sqrt{a}.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi za $\sqrt{a+b-c}=\sqrt{b+c-a}=\sqrt{c+a-b}$, odnosno $a=b=c$.

Rješenje zadatka 12. Vrijedi

$$\begin{aligned}
&{a_1}^2+{a_2}^2+...+{a_n}^2 \geqslant n \quad \Leftrightarrow\\
&\frac{{a_1}^2+{a_2}^2}{2}+\frac{{a_2}^2+{a_3}^2}{2}+...+\frac{{a_{n-1}}^2+{a_n}^2}{2}+\frac{{a_n}^2+{a_1}^2}{2} \geqslant n.
\end{aligned}$$

Sada možemo primijeniti $A-G$ nejednakost na svaki od članova, a tvrdnja zadatka slijedi izravno iz njihove sumacije i primjene uvjeta zadatka.

Rješenje zadatka 13. Vrijedi

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+...+\frac{a_n}{s-a_n}=n\cdot\frac{\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+...+\frac{s}{s-a_n}}{n}-n.$$

Iz $A-H$ nejednakosti dobivamo

$$n\cdot\frac{\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+...+\frac{s}{s-a_n}}{n}-n \geqslant n\cdot\frac{n}{\frac{s-a_1+s-a_2+...+s-a_n}{s}}-n=\frac{n^2}{n-1}-n=\frac{n}{n-1}.$$