Površine u geometriji

17.1.2016.

Uvod

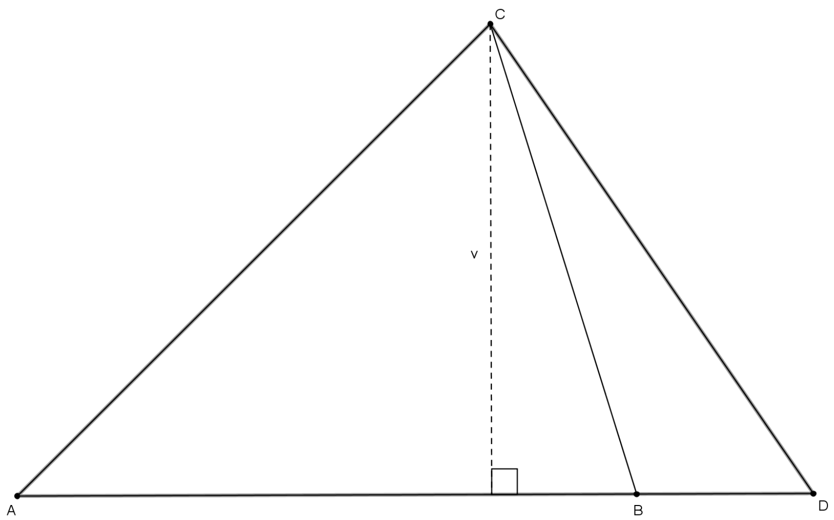
Dosad ste naučili računati površinu raznih geometrijskih likova (trokuta, pravokutnika, trapeza, kruga, ...). Cilj ovog predavanja jest ta znanja proširiti – posebnu pažnju posvetit ćemo površini trokuta, izvesti nekoliko različitih formula za njeno računanje i pokazati kako se te formule mogu primjenjivati u zadatcima.

"Klasična" formula za površinu trokuta

Iz osnovne škole vam je poznato da je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine stranice trokuta i duljini visine na tu stranicu, tj. ukoliko su a, b, c duljine stranica trokuta, a h_a, h_b, h_c duljine pripadnih visina, onda je površina P trokuta jednaka

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c. \tag{1}$$

Promotrimo jednu relativno očitu, ali korisnu posljedicu ove formule: neka trokuti ABC i BDC imaju zajedničku visinu (ili dvije visine jednake duljine) na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$ kao na slici.



Tada se površine trokuta ABC i BDC odnose kao duljine stranica koje imaju zajedničku visinu:

$$\frac{P(ABC)}{P(BDC)} = \frac{\frac{1}{2}|AB|v}{\frac{1}{2}|BD|v} = \frac{|AB|}{|BD|}.$$

Navedenu činjenicu možemo primijeniti u brojnim zadatcima, a sljedeća dva vrlo jednostavno dočaravaju i kako to možemo napraviti:

Zadatak 1.
Dokažite da težišnica trokuta dijeli taj trokut na dva trokuta jednakih površina.

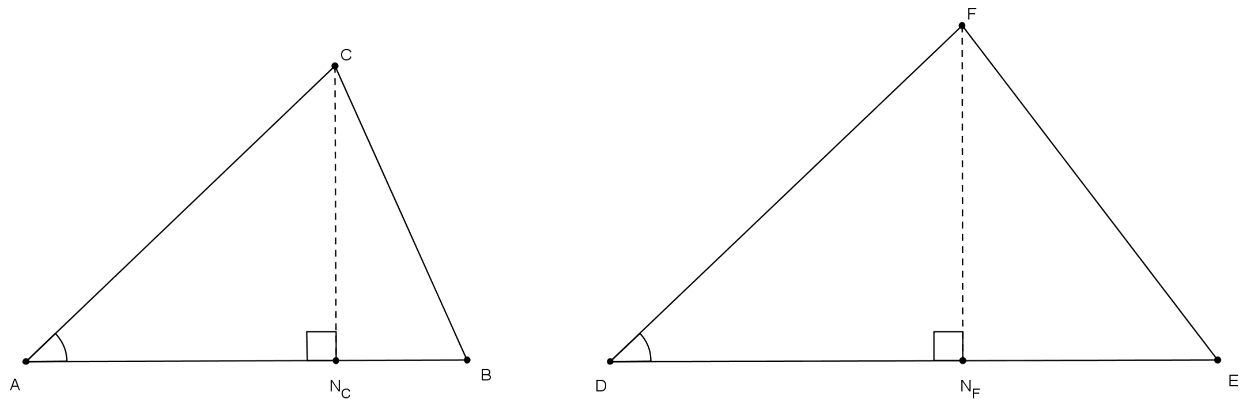
Zadatak 2.
Neka su P, Q, R, S polovišta stranica konveksnog četverokuta $ABCD$. Na pravcu PQ odabrane su međusobno različite točke K, L, dok su na pravcu RS odabrane međusobno različite točke M, N. Dokažite da trokuti KLN i KLM imaju jednake površine.

Rješenje.
Uputa: uočite najprije da je četverokut $PQRS$ paralelogram.

A što ako su kutovi jednaki?

Neka su trokuti ABC i DEF takvi da je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$. Tada vrijedi

$$\frac{P(ABC)}{P(DEF)} = \frac{|BA| \cdot |CA|}{|ED| \cdot |FD|}.$$



Dokažimo ovu tvrdnju. Ukoliko vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF = 90°$, tvrdnja vrijedi (prisjetite se kako se računa površina pravokutnog trokuta). Pretpostavimo da su ti kutovi šiljasti i označimo s N_C, N_F odgovarajuća nožišta visina kao na slici. Tada su trokuti AN_CC i DN_FF slični (prema KK poučku), pa imamo

$$\frac{|CN_C|}{|AC|} = \frac{|FN_F|}{|FD|} \Rightarrow \frac{|CN_C|}{|FN_F|} = \frac{|AC|}{|FD|}.$$

Odavde slijedi

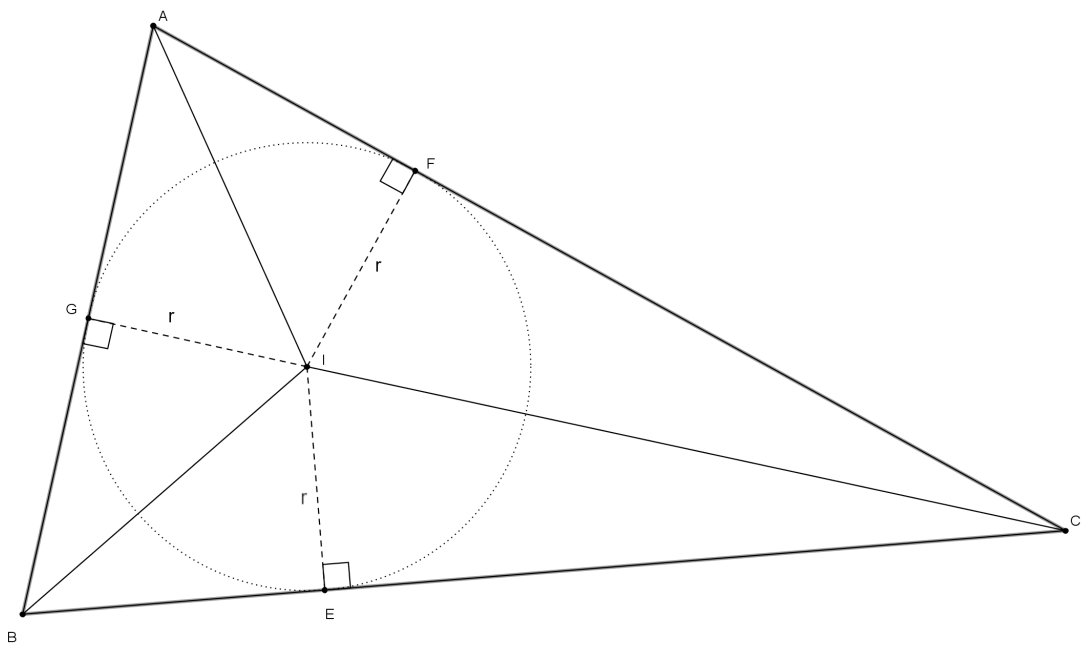
$$\frac{P(ABC)}{P(DEF)} = \frac{|AB| \cdot |CN_C|}{|DE| \cdot |FN_F|} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|DE| \cdot |FD|}.$$

U slučaju kada su ti kutovi tupi, tvrdnja se dokazuje analogno i taj slučaj prepuštamo vama kao samostalnu vježbu.

Uočimo da pomoću ove tvrdnje vrlo jednostavno slijedi svojstvo simetrale kuta u trokutu.

Zadatak 3.
Dokažite da simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije stranice.

Površina trokuta pomoću radijusa upisane kružnice



Neka je I središte trokutu ABC upisane kružnice, a E, F i G dirališta upisane kružnice sa stranicama trokuta kao na slici. Povucimo dužine $\overline{AI}$, $\overline{BI}$, $\overline{CI}$ – na taj smo način trokut podijelili na tri trokuta. Uočimo da u svakom od tih trokuta jedna visina (visina na stranicu trokuta ABC) ima duljinu r, gdje je r radijus upisane kružnice. Ukoliko duljine stranica trokuta označimo s a, b, c, površinu trokuta ABC možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} P = P(ABC) &= P(ABI) + P(BCI) + P(CAI) \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc \\ &= r \cdot \frac{a+b+c}{2}. \end{aligned}$$

Ukoliko uvedemo oznaku $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (ovu veličinu zovemo **poluopseg trokuta**), vrijedi

$$P = rs. \tag{2}$$

Dakle, površina trokuta jednaka je umnošku radijusa upisane kružnice i poluopsega tog trokuta.

Zadatak 4.
Ako su h_a, h_b, h_c duljine visina trokuta, a r polumjer tom trokutu upisane kružnice, dokažite jednakost

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Još neke formule

Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, s poluopseg, R radijus opisane kružnice, a P njegova površina. Tada površinu trokuta možemo izraziti pomoću njegovog radijusa opisane kružnice:

$$P = \frac{abc}{4R}, \tag{3}$$

a vrijedi i tzv. **Heronova formula** za površinu trokuta:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{4}$$

Zadatak 5.
Dokažite formule (3) i (4).

Zadatci i rješenja

Zadatak 6.
Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC dana je točka M. Konstruirajte pravac kroz tu točku koji dijeli trokut na dva dijela jednakih površina.

Zadatak 7.
Zadan je konveksni četverokut $ABCD$.

(a) Konstruirajte trokut koji ima jednaku površinu kao zadani četverokut.

(b) Konstruirajte pravac koji prolazi vrhom C tog četverokuta i dijeli taj četverokut na dva lika jednakih površina.

Zadatak 8.

(a) Dokažite da težišnice trokuta dijele taj trokut na šest trokuta međusobno jednakih površina.

(b) Dokažite da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$ (računajući od vrha).

Zadatak 9.
Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su, tim redom, točke P i Q. Dužine $\overline{AQ}$ i $\overline{CP}$ sijeku se u točki O. Odredite površinu četverokuta $OPBQ$ ako su površine trokuta COQ, AOC i APO redom jednake 1 cm^2, 2 cm^2, 3 cm^2.

Rješenje.
24 cm^2.

Zadatak 10.
Unutar trokuta ABC dana je točka T. Neka su x, y, z redom udaljenosti točke T od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ i neka su h_a, h_b, h_c redom duljine visina na te stranice. Odredite vrijednost zbroja

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c}.$$

Zadatak 11.
U šiljastokutnom trokutu ABC točke D, E, F redom su nožišta visina iz vrhova A, B, C trokuta, a točka H je ortocentar. Odredite vrijednost zbroja
$$\frac{|AH|}{|AD|}+\frac{|BH|}{|BE|}+\frac{|CH|}{|CF|}.$$

Zadatak 12.
Zadan je konveksni četverokut $ABCD$. Točke M i N su redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, točka K je sjecište pravaca AN i DM, a točka L je sjecište pravaca BN i CM. Dokažite da je
$$P(MKNL) = P(AKD) + P(BLC).$$

Zadatak 13.
Dijagonale konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki O, a P i Q su proizvoljne točke u ravnini tog četverokuta. Dokažite jednakost
$$\frac{P(ABC)}{P(ABD)} = \frac{P(ACP)}{P(AOP)} \cdot \frac{P(BOQ)}{P(BDQ)}.$$

Zadatak 14.
Točke P i Q su, tim redom, na stranicama $\overline{AB}$ i CD četverokuta $ABCD$ tako da vrijedi
$$|AP| : |PB| = |CQ| : |QD|.$$
Dokažite
$$P(ABCD) = P(QAB) + P(PCD).$$

Zadatak 15.
Dane su točke A', B', C', tim redom, na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC tako da vrijedi
$$|A'C| = n|A'B|,\ |B'A| = n|B'C|,\ |C'B| = n|C'A|,$$
za neki prirodan broj $n > 1$. Neka je točka D sjecište pravaca AA' i BB', točka E sjecište pravaca BB' i CC', a točka F sjecište pravaca CC' i AA'. Odredite omjer površina trokuta DEF i ABC. Što dobivamo u slučaju $n = 1$?

Zadatak 16.
U pravokutnom trokutu ABC simetrale šiljastih kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAC$ sijeku katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama D i E. Ako se pravci BD i AE sijeku u točki I, dokažite
$$P(ABED) = 2P(ABI).$$

Zadatak 17.
Trokutu ABC upisana je kružnica te su na tu kružnicu položene tangente paralelno stranicama trokuta. Time su od trokuta ABC odsječena tri manja trokuta kojima su polumjeri upisanih kružnica jednaki r_1, r_2, r_3. Ako je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC, dokažite da vrijedi
$$r_1 + r_2 + r_3 = r.$$

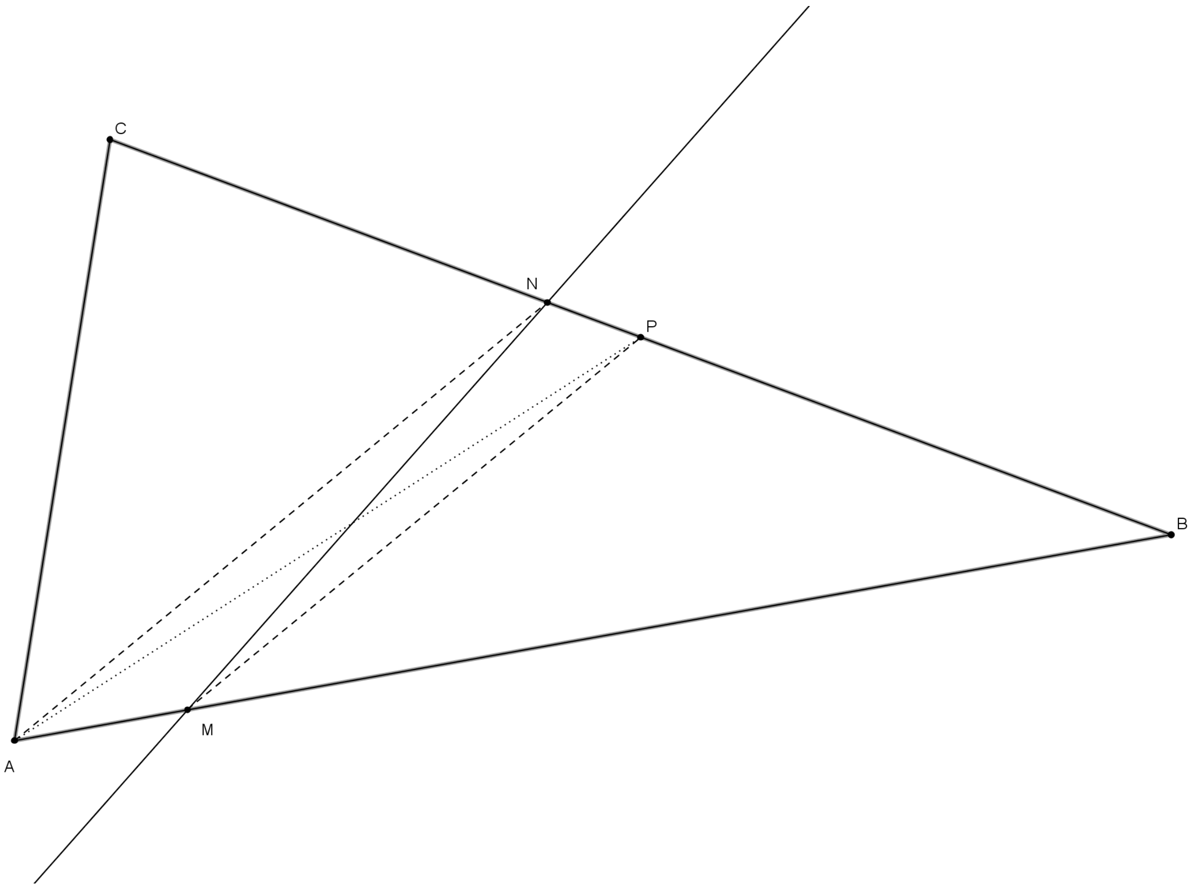
Zadatak 18.
Kružnica upisana u pravokutni trokut dodiruje hipotenuzu u točki koja ju dijeli na dva dijela duljina m i n. Kolika je površina trokuta?

Rješenje.
Površina je jednaka mn. Uputa: primijenite Pitagorin poučak.

Zadatak 19.
Dan je paralelogram $ABCD$ i proizvoljna točka E na stranici $\overline{AD}$. Neka su r_1, r_2, r_3 redom polumjeri kružnica upisanih trokutima ABE, BEC i CED. Dokažite da je $r_1 + r_3 \geqslant r_2$. Kada vrijedi jednakost?

Rješenja nekih zadataka

Rješenje zadatka 6.



Pretpostavimo da smo konstruirali traženi i pravac te (radi određenosti) pretpostavimo da traženi pravac siječe stranicu $\overline{BC}$ trokuta u točki N. Neka je P polovište te stranice. Budući da je $\overline{AP}$ težišnica u trokutu ABC, imamo

$$P(ABP) = P(ACP) = \frac{1}{2}P(ABC),$$

a prema pretpostavci je

$$P(AMNC) = P(MNB) = \frac{1}{2}P(ABC).$$

Dakle,

$$P(MNP) = \frac{1}{2}P(ABC) - P(MPB) = P(MAP)$$
$$\Rightarrow P(MNP) = P(MAP),$$

a budući da su to trokuti sa zajedničkom stranicom $\overline{MP}$, visine na tu stranicu su im jednakih duljina. Odavde slijedi $MP \parallel AN$. Dakle, točku N dobijemo tako da kroz A povučemo paralelu s pravcem MP.

Rješenje zadatka 7. **(a)** Povucite vrhom C pravac paralelu s dijagonalom $\overline{BD}$. Neka ta dijagonala siječe pravac AB u točki E. Tada trokut AED ima jednaku površinu kao i četverokut $ABCD$ (zašto?).

(b) Uputa: iskoristite (a) dio zadatka i zadatak 1.

Rješenje zadatka 10. Uočimo da je x duljina visine na stranicu $\overline{BC}$ u trokutu BCT. Budući da trokuti ABC i BCT imaju zajedničku stranicu, površine im se odnose kao duljine visina na tu stranicu, tj.

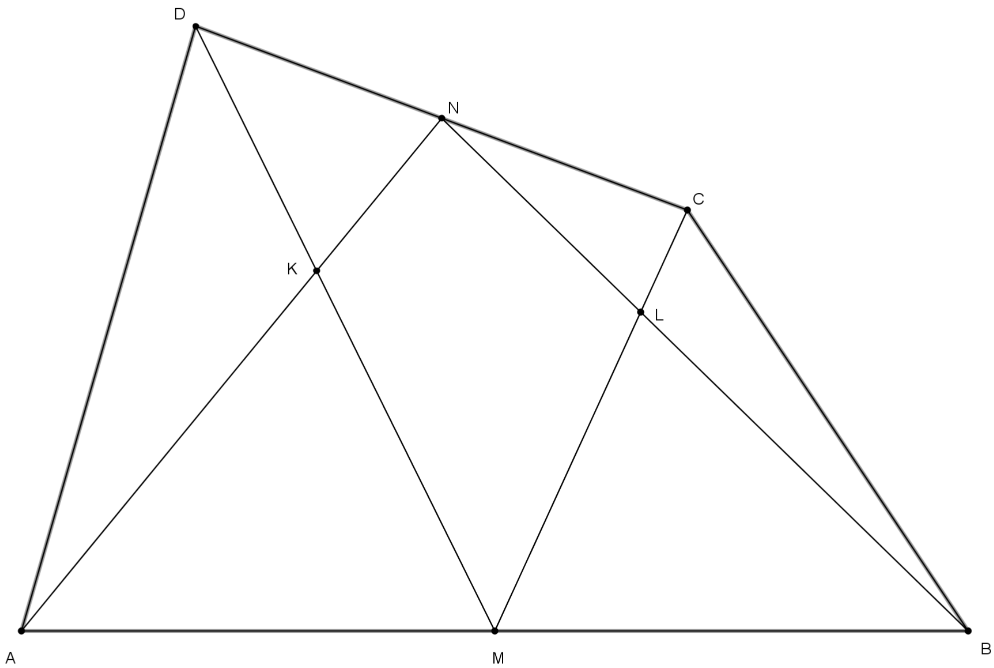
$$\frac{x}{h_a} = \frac{P(BCT)}{P(ABC)}.$$

Analogno dobijemo za preostala dva omjera pa imamo

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = \frac{P(BCT) + P(CAT) + P(ABT)}{P(ABC)} = 1.$$

Rješenje zadatka 11. Uputa: postupite slično kao u prethodnom zadatku. Traženi zbroj jednak je 2.

Rješenje zadatka 12.



Budući da su $\overline{DM}$ i $\overline{BN}$, tim redom, težišnice trokuta ABD i BCD, imamo

$$P(AMD) = \frac{1}{2}P(ABD),\ P(BCN) = \frac{1}{2}P(BCD),$$

a zbrajanjem ovih relacija imamo

$$P(AMD) + P(BCN) = \frac{1}{2}P(ABCD)$$

$$\Rightarrow P(MBND) = \frac{1}{2}P(ABCD)$$

$$\Rightarrow P(MKNL) + P(BLM) + P(KND) = \frac{1}{2}P(ABCD). \qquad (\star)$$

Analogno imamo

$$P(MBC) = \frac{1}{2}P(ABC),\ P(AND) = \frac{1}{2}P(ACD),$$

odakle slijedi

$$P(MBC) + P(AND) = \frac{1}{2}P(ABCD)$$

$$\Rightarrow P(AMCN) = \frac{1}{2}P(ABCD)$$

$$\Rightarrow P(MKNL) + P(AMK) + P(CLN) = \frac{1}{2}P(ABCD). \tag{$\star\star$}$$

Zbrajanjem relacija ($\star$) i ($\star\star$) dobivamo

$$2P(MKNL) + P(AMK) + P(MBL) + P(CLN) + P(NKD) = P(ABCD),$$

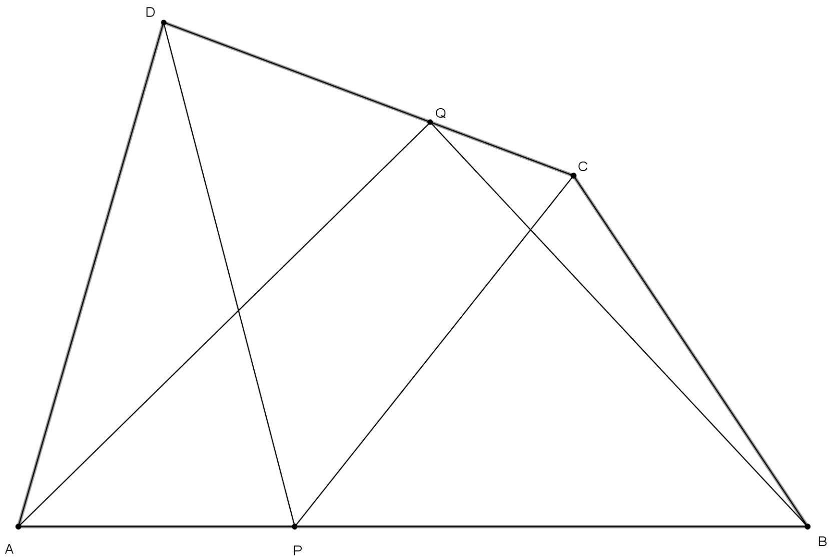
a zbog

$$P(ABCD) = P(MKNL) + P(AKD) + P(BLC) + P(AMK) + P(MBL) + P(CLN) + P(NKD)$$

slijedi

$$P(MKNL) = P(AKD) + P(BLC).$$

Rješenje zadatka 14.



Prema uvjetima zadatka je

$$|AP| : |PB| = |CQ| : |QD| = 1 : k,$$

odakle slijedi

$$|CQ| = \frac{1}{k+1}|CD| \Rightarrow P(BCQ) = \frac{1}{k+1}P(BCD),$$

$$|QD| = \frac{k}{k+1}|CD| \Rightarrow P(AQD) = \frac{k}{k+1}P(ACD).$$

Slično dobijemo i

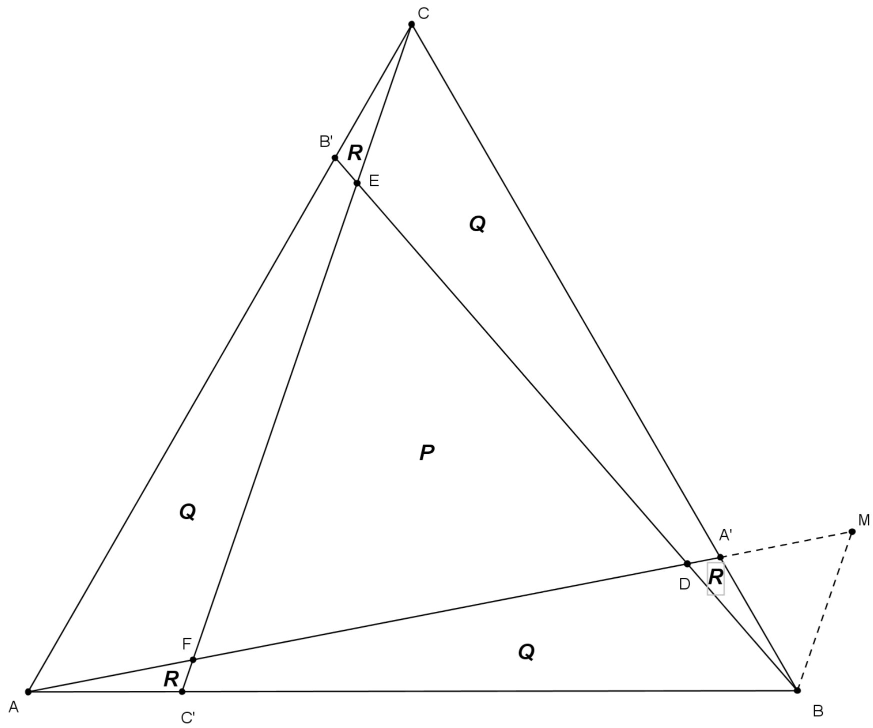
$$P(APD) = \frac{1}{k+1}P(ABD),\ P(BCP) = \frac{k}{k+1}P(ABC),$$

pa zbrajanjem slijedi

$$P(BCQ) + P(AQD) + P(APD) + P(BCP) = P(ABCD)$$

$$\Rightarrow 2P(ABCD) - P(ABQ) - P(CPD) = P(ABCD)$$
$$\Rightarrow P(ABCD) = P(QAB) + P(PCD).$$

Rješenje zadatka 15.



Uočimo da je trokut DEF također jednakostraničan (zašto?) te (zbog sukladnosti) vrijedi

$$P(AC'F) = P(BA'D) = P(CB'E) = R,$$

$$P(C'BDF) = P(A'CED) = P(B'AFE) = Q.$$

Neka je $P(DEF) = P$ te neka je točka M presjek pravca AA' i pravca kroz B paralelnog s pravcem CC'. Trokut BDM također je jednakostraničan (jer je sličan trokutu DEF), a iz sličnosti trokuta $BA'M$ i $CA'F$ slijedi i

$$\frac{|A'B|}{|BM|} = \frac{|A'C|}{|CF|} \Rightarrow \frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{1}{n} = \frac{|BM|}{|CF|} = \frac{|BD|}{|BE|}.$$

Budući da trokuti $A'BD$ i CBE imaju jedan zajednički kut, imamo

$$\frac{P(BA'D)}{P(BCE)} = \frac{R}{R+Q} = \frac{|BD| \cdot |BA'|}{|BE| \cdot |BC|} = \frac{1}{n(n+1)}. \tag{$\bullet$}$$

S druge strane,

$$\frac{P(AC'C)}{P(ABC)} = \frac{|AC'|}{|AB|} \Rightarrow 2R + Q = \frac{1}{n+1}P(ABC). \tag{$\bullet\bullet$}$$

Iz ($\bullet$) slijedi

$$R = \frac{1}{n(n+1)}R + \frac{1}{n(n+1)}Q$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{n^2+n-1} Q,$$

pa uvrštavanjem u (••) slijedi

$$\frac{2}{n^2+n-1} Q + Q = \frac{1}{n+1} P(ABC)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{n^2+n-1}{(n+1)(n^2+n+1)} P(ABC), \; R = \frac{1}{(n+1)(n^2+n+1)} P(ABC).$$

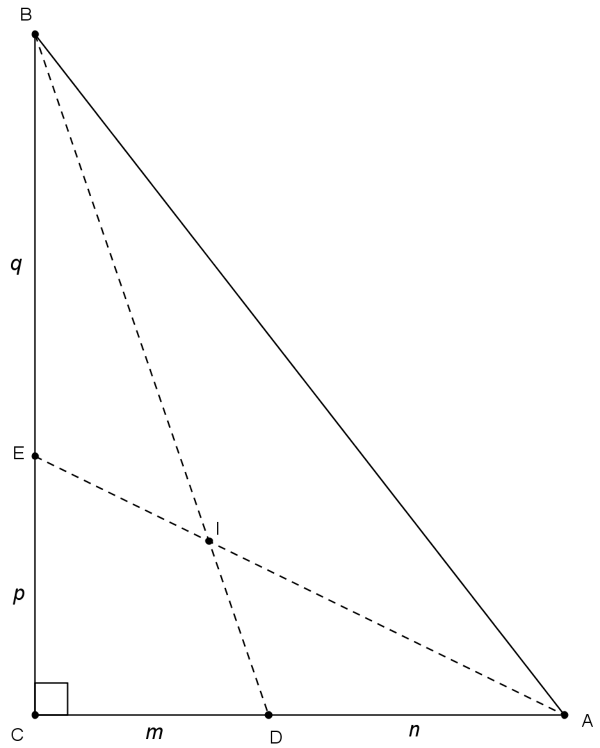
Sada slijedi

$$P + \frac{3n(n+1)}{(n+1)(n^2+n+1)} P(ABC) = P(ABC)$$

$$\Rightarrow P = \frac{n^2-2n+1}{n^2+n+1} P(ABC) = \frac{(n-1)^2}{n^2+n+1} P(ABC).$$

Uočimo da u slučaju $n = 1$ dobijemo $P = 0$, tj. (još jedan) dokaz da se težišnice jednakostraničnog trokuta sijeku u jednoj točki.

Rješenje zadatka 16. Uputa: uvedite oznake kao na slici te označite duljine stranica trokuta standardno s a, b, c te polumjer upisane kružnice s r.



Koristeći se zadatkom 3 i formulom (2) izrazite veličine m, n, p, q, r pomoću duljina stranica a, b, c trokuta. Zatim pokažite jednakosti

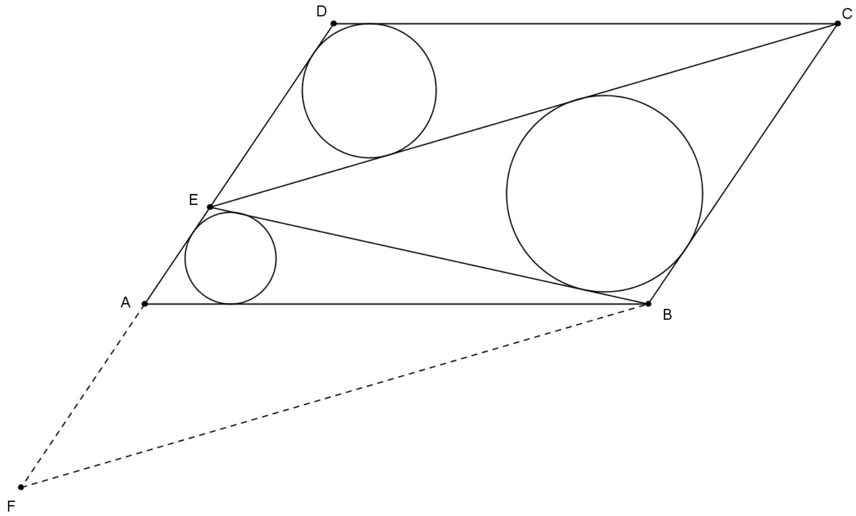
$$P(DEI) = \frac{a}{b+c} P(DIA), \; P(DIA) = \frac{b}{a+c} P(AIB), \; P(EIB) = \frac{a}{b+c} P(AIB).$$

Odavde će slijediti

$$\frac{P(ABED)}{P(AIB)} = 1 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{ab}{(a+c)(b+c)} = 2.$$

Rješenje zadatka 17. Uputa: iskoristite formulu (2) te činjenicu da je omjer površina sličnih trokuta jednak kvadratu koeficijenta sličnosti tih trokuta.

Rješenje zadatka 19.



Translatirajmo trokut EDC duž dužine $\overline{AE}$. Točka E preslikava se u točku F i vrijedi $FEB \cong CBE$, tj.

$$P(AEB) + P(EDC) = P(BEC).$$

Uočimo da prema nejednakosti trokuta (duljina jedne stranice nije veća od zbroja preostale dvije) slijedi

$$|DE| + |EC| \geqslant |CD| = |AB|$$

$$\Leftrightarrow |BE| + |EC| + |BC| \geqslant |AE| + |BE| + |AB|$$

$$\Leftrightarrow o(BEC) \geqslant o(BAE),$$

gdje smo sa o označili opseg trokuta. Analogno dobivamo i $o(BEC) \geqslant o(EDC)$, pa prema (2) imamo

$$r_1 + r_3 = \frac{2P(AEB)}{o(AEB)} + \frac{2P(EDC)}{o(EDC)} \geqslant \frac{2(P(AEB) + P(EDC))}{o(BEC)} = r_2.$$

Jednakost se postiže kada se u nejednakosti trokuta postiže jednakost, a to je u slučajevima $E = A$ ili $E = D$.