MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Jednadžbe i sustavi jednadžbi

24.1.2016.

Uvod

Dosad ste se susreli s nekim tipovima (uglavnom linearnih) jednadžbi i sustava jednadžbi i naučili ih rješavati. Cilj ovog predavanja jest pokazati neke ideje za rješavanje nekih netipičnih jednadžbi i sustava koji se pojavljuju na natjecanjima. Sadržajno, ovo predavanje ne donosi ništa novo, ali primjenjuje tehnike koje su izložene u ranijim predavanjima:

- *Algebarski izrazi.* Kod rješavanja raznih jednadžbi i sustava često su korisne supstitucije kao i zbrajanje (oduzimanje, množenje, ...) pojedinih jednadžbi sustava. Također, faktorizacija jednadžbe (pogotovo ako dobijemo da je produkt faktora jednak nuli) može igrati izrazito veliku ulogu. Za sve je ovo potrebno izrazito dobro poznavanje osnovnih identiteta među algebarskim izrazima.
- *Nejednakosti.* Ponekad jednadžbu možemo prikazati kao granični slučaj neke nejednakosti (tj. slučaj u kojemu se u toj nejednakosti postiže jednakost) i to iskoristiti kako bismo izvukli neke nove zaključke (ili direktno dobili rješenja jednadžbe).
- *Djeljivosti i kongruencije.* Ukoliko tražimo sva cjelobrojna ili prirodna rješenja neke jednadžbe ili sustava (npr. kada rješavamo neke diofantske jednadžbe), mogu nam pomoći i činjenice iz djeljivosti i račun s kongruencijama.

Zato, ukoliko ste zaboravili neke od gore navedenih stvari, svakako preporučamo da ih se prisjetite uz pomoć prethodnih predavanja.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Nađite sva realna rješenja jednadžbe:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{12}}-\frac{4}{x^7}=0.$$

Rješenje.
Jednadžbu ćemo preurediti tako da lijevu stranu zapišemo u obliku sume dva kvadrata:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^7}+\frac{1}{x^{12}}+\frac{1}{x^6}-\frac{2}{x^7}+\frac{1}{x^8}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^6}\right)^2+\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)^2=0.$$

Odavde slijedi kako oba pribrojnika moraju biti jednaka nuli:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^6}=0 \;\Rightarrow\; x^5-x=0 \;\Rightarrow\; x(x^4-1)=0;$$
$$\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}=0 \;\Rightarrow\; x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1.$$

Budući da rješenje mora zadovoljavati obje dobivene jednadžbe, vidimo da je $x=1$ jedino realno rješenje zadane jednadžbe.

Zadatak 2.
Nađite sve realne brojeve x, y, z koji zadovoljavaju jednadžbu

$$2x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2xz + 2y + 1 = 0.$$

Zadatak 3.
Nađite sva realna rješenja jednadžbe

$$\left(16x^{200} + 1\right)\left(y^{200} + 1\right) = 16(xy)^{100}.$$

Zadatak 4.
Nađite sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{3x^2 + 12x + 28} + \sqrt{2x^2 + 8x + 33} = -2x^2 - 8x + 1.$$

Rješenje.
Uputa: svaki od triju kvadratnih trinoma prikažite u obliku zbroja kvadrata i nekog realnog broja te uočite kako je lijeva strana veća ili jednaka od $\sqrt{16} + \sqrt{25} = 9$, a desna manja ili jednaka 9. Odavde će slijediti da je $x = -2$ jedino rješenje zadane jednadžbe.

Zadatak 5.
Nađite sva realna rješenja jednadžbe

$$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x.$$

Zadatak 6.
Nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z) = 90 \\ (y+z)(x+y+z) = 105 \\ (z+x)(x+y+z) = 255 \end{cases}$$

Rješenje.
Zbrajanjem jednadžbi dobivamo

$$2(x+y+z)^2 = 450,$$

a odavde slijedi $x + y + z = 15$ ili $x + y + z = -15$. Uvrštavanjem u zadani sustav dobivamo dva sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x+y = 6 \\ y+z = 7 \\ x+z = 15 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y = -6 \\ y+z = -7 \\ x+z = -15 \end{cases},$$

a oba možemo riješiti tako da sve tri jednadžbe sustava zbrojimo, dobivenu jednadžbu podijelimo s 2 i od nje redom oduzimamo svaku jednadžbu sustava. Dobivamo da su $(x, y, z) = (8, -2, 9)$ i $(x, y, z) = (-8, 2, 9)$ sva rješenja sustava.

Zadatak 7.
Nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x + y + xy = 19 \\ y + z + yz = 11 \\ z + x + zx = 14 \end{cases}$$

Zadatak 8.
Ako je $n \geqslant 3$, nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 \cdots x_n = 0 \\ x_2^2 - x_1 \cdots x_n = 0 \\ \vdots \\ x_n^2 - x_1 \cdots x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Zadatak 9.
Odredite sve realne brojeve $x_1, \ldots, x_n$ takve da vrijedi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_1+1} = \dfrac{x_2}{x_2+3} = \ldots = \dfrac{x_n}{x_n+(2n-1)} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 8 \end{cases}$$

Zadatak 10.
Realni brojevi zadovoljavaju jednadžbe

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0,$$
$$y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0.$$

Koliko je $x+y$?

Rješenje.
2. Uputa: zbrojite i oduzmite zadane jednadžbe te iskoristite formule za kvadrat i kub binoma, razliku kvadrata i kubova te zbroj kubova.

Zadatak 11.
Neka je $a \in \mathbb{R}$. Nađite sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x+a+1} + \sqrt[3]{x+a+2} = 0.$$

Zadatak 12.
Nađite sva realna rješenja jednadžbe

$$x^4 + y^4 + z^4 = 4xyz - 1.$$

Rješenje.
Primijenimo AG nejednakost na (nenegativne) realne brojeve $x^4, y^4, z^4, 1$:

$$\frac{x^4+y^4+z^4+1}{4} \overset{\text{AG}}{\geqslant} \sqrt[4]{x^4y^4z^4} = |xyz| \geqslant xyz.$$

Sada vidimo kako zadana jednadžba predstavlja granični slučaj kod obje od navedenih nejednakosti, tj. u obje nejednakosti moraju vrijediti jednakosti. Budući da se nejednakost u AG nejednakosti postiže ako i samo ako su svi članovi međusobno jednaki, dobivamo dva uvjeta:

1° $x^4 = y^4 = z^4 = 1$,

2° $|xyz| = xyz$.

Raspisivanjem ovih uvjeta dobivamo rješenja jednadžbe: $(x, y, z) \in \{(1,1,1), (-1,-1,1), (-1,1,-1), (1,-1,-1)\}$.

Zadatak 13.
Nađite sve pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{x_2}{2^2} + \dfrac{x_3}{3^2} + \ldots + \dfrac{x_n}{n^2} = \dfrac{n}{n+1} \\ \dfrac{1}{2^2x_1} + \dfrac{1}{3^2x_2} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)^2x_n} = \dfrac{n}{n+1} \end{cases}$$

Zadatak 14.
Nađite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} (1+4x^2)y = 4z^2 \\ (1+4y^2)z = 4x^2 \\ (1+4z^2)x = 4y^2 \end{cases}$$

Rješenje.
Množenjem jednadžbi i faktorizacijom dobivamo $xyz\left((1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) - 64xyz\right) = 0$. Odavde već dobivamo jedno rješenje, $(0,0,0)$. Iz jednadžbe $(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2) = 64xyz$ primjenom AG nejednakosti na svaki faktor na lijevoj strani dobivamo da je $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ još jedno rješenje.

Zadatak 15.
Nađite sve nenegativne realne brojeve x, y koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} 3^{x^2+y} + 3^{y^2+x} = 1458 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Zadatak 16.
Nađite sve pozitivne realne brojeve $x_1, \ldots, x_{100}$ koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} = 4 \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = 1 \\ \vdots \\ x_{99} + \dfrac{1}{x_{100}} = 1 \\ x_{100} + \dfrac{1}{x_1} = 4 \end{cases}$$

Zadatak 17.
Riješite jednadžbu u skupu $\mathbb{N}_0$:

$$m^2 + n^2 = (m+n)^3.$$

Zadatak 18.
Nađite sve $x, y \in \mathbb{Z}$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 540.$$

Zadatak 19.
Dokažite da je jedino rješenje jednadžbe

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 6xyz$$

u skupu $\mathbb{Z}$ dano s $x = y = z = 0$.

Rješenja nekih zadataka

Rješenje zadatka 2. Jednadžba se može zapisati u obliku $(x-2y)^2+(x+z)^2+(y+1)^2=0$, a odavde slijedi da je $(x,y,z)=(-2,2,-1)$ jedino rješenje.

Rješenje zadatka 3. Uvedimo supstituciju $a=4x^{100}$, $b=y^{100}$. Sređivanjem jednadžbe dobivamo

$$(ab-1)^2+(a-b)^2=0,$$

a odavde slijedi $ab=1$ i $a=b$. Iz ova dva uvjeta imamo $b^2=1$, a kako je $b\geqslant 0$, slijedi $b=1$, tj. $y=\pm 1$. No, sada iz uvjeta $ab=1$ imamo

$$a=1 \;\Rightarrow\; 4x^{100}=1 \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}.$$

Dakle, sva rješenja zadane jednadžbe dana su s

$$(x,y)\in\left\{\left(1,\frac{1}{\sqrt[50]{2}}\right),\left(1,-\frac{1}{\sqrt[50]{2}}\right),\left(-1,\frac{1}{\sqrt[50]{2}}\right),\left(-1,-\frac{1}{\sqrt[50]{2}}\right)\right\}$$

Rješenje zadatka 5. Uputa: iskoristite nejednakost $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ koja vrijedi za sve realne brojeve a,b,c. $x=0$ je jedino realno rješenje zadane jednadžbe.

Rješenje zadatka 7. Uputa: svakoj jednadžbi sustava dodajte 1 i zatim faktorizirajte lijevu stranu svake jednadžbe. Sva realna rješenja sustava su $(x,y,z)=(-6,-5,-4)$ i $(x,y,z)=(4,3,2)$.

Rješenje zadatka 8. Uputa: razlikujte slučajeve kada je $n=3$ i $n>3$. Druge pribrojnike u svakoj jednadžbi premjestite na desnu stranu i pomnožite tako dobivene jednadžbe.

Rješenje zadatka 9. Uputa: uočite da za sve $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ vrijedi

$$\frac{x_i}{x_i+(2i-1)}=\frac{x_j}{x_j+(2j-1)}\Leftrightarrow x_i : x_j=(2i-1):(2j-1).$$

Uz korištenje činjenice da je zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva jednak n^2, dobivamo rješenje

$$x_k=\frac{8(2k-1)}{n^2},\; k=1,\ldots,n.$$

Rješenje zadatka 11. Uvedimo supstituciju $p=x+a$, $q=x+a+2$. Tada je $x+a+1=\frac{p+q}{2}$ i jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}=-\sqrt[3]{\frac{p+q}{2}}.$$

Kubiranjem ove jednadžbe i sređivanjem dobivamo

$$(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})\left(\sqrt[3]{p^2}+\sqrt[3]{pq}+\sqrt[3]{q^2}\right)=0.$$

Zato imamo dvije mogućnosti

1° $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}=0 \;\Rightarrow\; p=-q \;\Rightarrow\; x=-a-1,$

2° $\sqrt[3]{p^2}+\sqrt[3]{pq}+\sqrt[3]{q^2}=0.$
Množenjem ove jednadžbe s $\sqrt[3]{p}-\sqrt[3]{q}$ i korištenjem formule za razliku kubova dobivamo $p=q$, tj. $0=2$, pa vidimo kako ova jednadžba nema rješenja.

Dakle, jedino rješenje zadane jednadžbe je $x=-a-1$.

Rješenje zadatka 13. Zbrajanjem zadanih jednadžbi i primjenom AG nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{2n}{n+1} &= \left(x_1 + \frac{1}{2^2 x_1}\right) + \left(\frac{x_2}{2^2} + \frac{1}{(3^2 x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2 x_n}\right) \\
&\overset{\text{AG}}{\geqslant} 2\sqrt{x_1 \cdot \frac{1}{2^2 x_1}} + 2\sqrt{\frac{x_2}{2^2} \cdot \frac{1}{(3^2 x_2}} + \ldots + 2\sqrt{\frac{x_n}{n^2} \cdot \frac{1}{(n+1)^2 x_n}} \\
&= 2\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da se u svakoj od AG nejednakosti mora postizati jednakost, pa zato imamo

$$\frac{x_k}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2 x_k},\ k = 1, \ldots, n$$

tj.

$$x_k = \frac{k}{k+1},\ k = 1, \ldots, n.$$

Rješenje zadatka 15. $x = y = 2$. Uputa. Primijenite dvaput KA nejednakost na drugu jednadžbu kako biste dobili nejednakosti

$$x + y \geqslant 4,\ x^2 + y^2 \geqslant 8.$$

Sada primijenite AG nejednakost na lijevu stranu prve jednadžbe i uočite kako je ta jednadžba granični slučaj te jednakosti.

Rješenje zadatka 16. $x_k = 2$ za neparan k, a $x_k = \frac{1}{2}$ za paran k, $k = 1, 2, \ldots, 100$. Uputa: pomnožite sve jednadžbe sustava i primijenite AG nejednakost na svaki od faktora na lijevoj strani dobivene jednadžbe.

Rješenje zadatka 17. Jednadžbu ćemo malo preurediti

$$(m+n)^2 - 2mn = (m+n)^3 \ \Leftrightarrow\ -2mn = (m+n)^2(m+n-1).$$

Zbog $-2mn \leqslant 0$ i $(m+n)^2 \geqslant 0$ vidimo da mora biti $m + n - 1 \leqslant 0$, tj. $m + n \leqslant 1$. Odavde ispitivanjem dobivamo da su sva rješenja u skupu $\mathbb{N}_0$ dana s $(m, n) \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$.

Rješenje zadatka 18. Uputa: najprije uočite kako x i y moraju biti parni, tj. $x = 2x_1$ i $y = 2y_1$. Sada dijeljenjem jednadžbe s 4 dobivamo

$$x_1^2 + y_1^2 = 135.$$

No, ova jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. Prisjetite se, 0 i 1 su jedini kvadratni ostaci modulo 4, dok je $135 \equiv 3 \pmod 4$.

Rješenje zadatka 19. Pretpostavimo suprotno. Tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je najveći zajednički djelitelj brojeva x, y, z jednak 1 (u suprotnom, kada bi njihov najveći zajednički djelitelj bio jednak $m > 1$, tada bi i brojevi $\frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}$ također zadovoljavali zadanu jednadžbu i njihov bi najveći zajednički djelitelj bio jednak 1). Kako je na desnoj strani jednadžbe paran broj, i na lijevoj strani jednadžbe također mora biti paran broj. Odavde vidimo da x mora biti paran, tj. $x = 2x_1$ za neki $x_1 \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem u jednadžbu i dijeljenjem s 2 dobivamo

$$4x_1^3 + y^3 + 2z^3 = 6x_1 yz.$$

Sada slično zaključujemo kako y mora biti paran, tj. $y = 2y_1$. Ponovnim uvrštavanjem i dijeljenjem s 2 dobivamo

$$2x_1^3 + 4y_1^3 + z^3 = 6x_1 y_1 z.$$

Sada zaključujemo da i z mora biti paran. No, to je kontradikcija s pretpostavkom da je najveći zajednički djelitelj brojeva x, y, z jednak 1. Dakle, jedino rješenje zadane jednadžbe u skupu $\mathbb{Z}$ zaista je $x = y = z = 0$.