MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Bojanja i popločavanja

31.1.2016.

Uvod/teorijske osnove

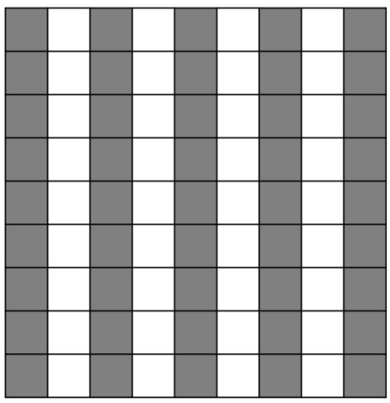
Ideja dokazivanja bojanjem i popločavanjem je u dijeljenju nekog skupa u više podskupova. Potom se prebrojavanjem broja objekata u podskupovima često dolazi do kontradikcije. Promotrimo slijedeće primjere:

Primjer 1. *Može li se šahovska ploča bez gornjeg lijevog i donjeg desnog polja prekriti s* 31 *dominom?*

Rješenje. Ne. Naime, svaka domina prekriva jedno bijelo i jedno crno polje. Dakle, 31 domina prekiva ukupno 31 bijelo polje i 31 crno polje. Ipak, nakon što sa ploče uklonimo gornje lijevo i donje desno polje na njoj ostaje 32 crna polja i 30 bijelih. (zato jer su oba uklonjena polja iste, bijele boje).

Primjer 2. *U svakom polju ploče* 9×9 *sjedi po jedna žaba. U nekom trenutku svaka žaba skače dijagonalno u neko od četiri polja koja su imaju zajednički vrh s poljem u kojem se prvotno nalazila (može se dogoditi da se više žaba nađe u jednom polju). Odredite koliko najmanje polja ostane prazno nakon takvog skoka.*

Rješenje. Obojimo stupce ploče na način prikazan na slici.
Na taj način dobijemo 45 sivih i 36 bijelih polja. Pri svakom skoku, žaba mijenja boju polja na kojem se nalazi. Stoga će barem 9 sivih polja ostati prazno nakon svih skokova. Ako bismo sad pronašli konstrukciju skokova koja daje upravo 9 praznih polja, zadatak bi bio gotov. Opisat ćemo jednu moguću konstrukciju. U donjoj lijevoj podtabli visine 2, širine 8 žabe dijagonalno zamjene mjesta, te isto tako u desnoj gornjoj podtabli visine 6, širine 2. U nastalom "L" obliku u donjem desnom kutu dvije žabe koje mogu zamijeniti mjesto zamjene, a polje skroz dolje desno i ono dva mjesta iznad ostanu bez žaba (žabe koje su bile tamo skoče bilo gdje). Sad smo reducirali tablu na 7×7 podtablu. Postupak ponavljamo 4 puta do 1×1 podtable, tj. gornjeg lijevog kvartarića koji ostaje prazan, te nam je ostalo još $4 \cdot 2 = 8$ praznih polja tokom postupka.



Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Pravokutni pod prekriven je pločama 2×2 i 1×4. Jedna se ploča razbila, no dostupna nam je ploča drugog oblika. Dokažite da se pod ne može prekriti prerazmještajem ovih ploča.

Zadatak 2.
Odredi najmanji n takav da postoji način kako postaviti n domina 1×2 na ploču 6×6 tako da je nemoguće postaviti još jedan domino na tu ploču bez preklapanja.

Zadatak 3.
Je li moguće ploču dimenzije 10×10 popločati s 25 domina dimenzija 4×1?

Zadatak 4.
Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno).
Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši žeton na polju Y. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče?

Zadatak 5.
Može li se 250 $1 \times 1 \times 4$ kockica složiti u $10 \times 10 \times 10$ kocku?

Zadatak 6.
Dokažite da se pravokutnik $a \times b$ može popločati s $1 \times n$ pločama ako i samo ako $n|a$ ili $n|b$.

Zadatak 7.
Pravokutnik 6×6 prekriven je s dominama 2×1. Dokažite da moguće povući ravnu liniju koja taj pravokutnik dijeli na dva dijela bez da siječe neku od domina.

Zadatak 8.
Može li skakač obići ploču dimenzija 4×2012 i vratiti se na polazno polje tako da pritom stane na svako polje točno jednom?
Napomena: Skakač je figura koja se kreće kao u šahu: s polja označenog kružićem može se pomaknuti na jedno od osam polja označenih križićima (ako je to polje na ploči).

Zadatak 9.
Je li moguće podijeliti kvadrat na devet manjih kvadrata i obojiti ih tako da jedan od njih bude bijele boje,tri budu sive boje, a ostalih pet crne boje, te da bilo koja dva kvadrata iste boje budu sukladna i bilo koja dva kvadrata različite boje ne budu sukladna?

Zadatak 10.
Nazovimo ploču $n \times n$ defektnom ako joj nedostaje jedno polje. Dokaži da se svaka defektna ploča dimenzija $2^k \times 2^k$ može popločati pločicama u obliku slova L. Hint:Indukcija.

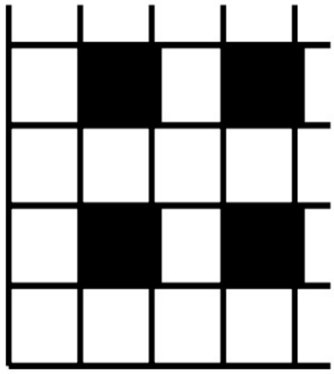
Zadatak 11.
Ploča 8×8 popločava se s 21 figurom oblika 1×3. Jedno polje te ploče ostaje nepokriveno. Koje je to polje?

Zadatak 12.
Na ploču dimenzija 8×8 postavljaju se tromino-pločice oblika tako da svaka tromino-pločica prekriva točno tri polja ploče, a međusobno se ne prekrivaju. Koliko je najmanje tromino-pločica potrebno postaviti na ploču ako želimo da se nakon toga više ne može postaviti nijedna dodatna tromino-pločica?

Zadatak 13.
Za koji n se ploča $8 \times n$ može popločati pločicama oblika L?

Rješenja nekih zadataka

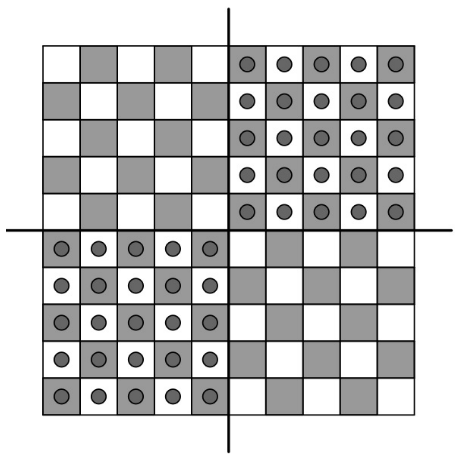
Rješenje zadatka 1. Obojimo pod kao na slici ispod. Pločica 4×1 uvijek prekriva ili 0 ili 2 crna polja, dok pločica 2×2 uvijek prekriva točno 1 crno polje. Slijedi tvrdnja zadatka.



Rješenje zadatka 3. Obojajmo ploču u boje $0, 1, 2, 3$ kao što je prikazano na slici ispod. Na koji god način postavili pločicu 4×1 na ploču ona uvijek prekriva točno jedno polje od svake boje. Dakle, 25 pločica trebalo bi prekrivati 25 polja svake boje. Ipak, imamo 26 polja koja su obojana bojom 1.

1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Rješenje zadatka 4. Obojimo polja ploče crnom i bijelom bojom kao na šahovskoj ploči (polje u donjem lijevom kutu je crno).
Tada 25 žetona u donjoj lijevoj četvrtini zauzima 12 bijelih i 13 crnih polja, a 25 žetona u gornjoj desnoj četvrtini takoder zauzima 12 bijelih i 13 crnih polja.
Primijetimo da žetoni svojim kretanjem uvijek prelaze sa crnog na crno, odnosno sa bijelog na bijelo polje, bez obzira kreću li se horizontalno, vertikalno ili dijagonalno.
Stoga se broj crnih (odnosno bijelih) polja koje žetoni zauzimaju ne mijenja.
Budući da žetoni u početku zauzimaju $12 + 12 = 24$ bijela i $13 + 13 = 26$ crnih polja, a donja polovica ploče se sastoji od 25 bijelih i 25 crnih polja, zaključujemo da je nemoguće postići da se svi žetoni nalaze na donjoj polovici

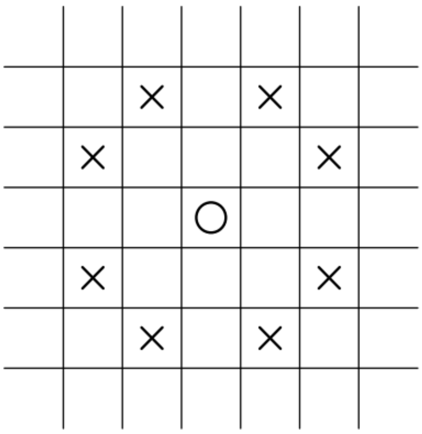


ploče.

Rješenje zadatka 6. Ako $n|a$ ili $n|b$ ploča se očito može prekriti pločicama $1 \times n$. Pretpostavimo, dakle, $n \nmid a$. Tada je $a = nq + r$, pri čemu je $0 < r < n$. Obojajmo ploču bojama kao na slici ispod. Tada imamo $bq + b$ polja svake od boja $1, 2, 3, ..., r$ te bq polja obojena sa $r + 1, ..., n$. h horizontalnih $1 \times n$ pločica prekriva po jednu pločicu svake boje. Svako vertikalno pokrivanje pokriva n pločica iste boje. Nakon što smo postavili h horizontalnih pločica preostalo je $(bq + b - h)$ polja obojena s $1, 2, ..., r$ te $(bq - h)$ polja svake od boja $r + 1, ..., n$. Dakle, $n \mid (bq + b - h)$ i $n \mid (bq - h)$. Dakle, $n \mid b$.

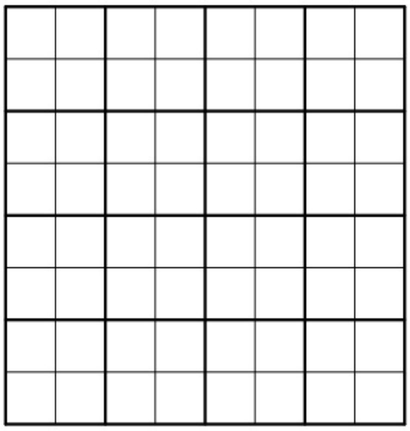
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Rješenje zadatka 8. Obojimo ploču šahovski crnom i bijelom bojom (susjedna polja imaju različitu boju). Primjetimo da se pri svakom potezu mijenja boja polja na kojem se skakač nalazi.
Nadalje, označimo polja u prvom i četvrtom retku kružićem, a polja u drugom i trećem retku križićem. Skakač mora s polja označenog kružićem skočiti na polje označeno križićem.
Pretpostavimo da postoji način da skakač posjeti svako polje točno jednom i vrati se na početak. Broj polja označenih križićem je jednak broju polja označenih kružićem. Tada skakač mora s polja označenog križićem (2. i 3. redak) skočiti na polje označeno kružićem (1. i 4. redak) jer bi skakanje s križića na križić značilo da u nekom trenutku moramo skočiti s kružića na kružić što je nemoguće.
Skakač u nekom trenutku mora doći na bijelo polje označeno kružićem. U sljedećem potezu dolazi na crno polje označeno križićem, pa onda opet na bijelo polje označeno kružićem itd. Isto zaključivanje možemo provesti i "unatrag": neposredno prije dolaska na bijelo polje označeno kružićem, skakač je morao biti na crnom polju označenom križićem, itd.
Zato nikad ne dolazi na bijelo polje označeno križićem, što je kontradikcija s pretpostavkom da skakač posjećuje svako polje.



Rješenje zadatka 9. Može se.

Rješenje zadatka 12. Podijelimo ploču na 16 kvadrata dimenzija 2×2 kvadrata kao na slici.



U svakom od tih kvadrata trebaju biti barem dva polja prekrivena, inače se na neprekrivena polja može postaviti tromino-pločica. Dakle, barem 32 polja trebaju biti prekrivena, a za to nam treba barem 11 tromino-pločica. Da je 11 tromino-pločica dovoljno pokazujemo konstrukcijom, kao primjerice na slici.