MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Vièteove formule i simetrični polinomi

28.2.2016.

Tema današnjeg predavanja gradivo je čije se osnove uče u sklopu redovne nastave u drugom razredu, a to su kvadratna jednadžba i Vièteove formule. Međutim, učenicima koji sudjeluju na natjecanjima često mogu poslužiti neka dodatna znanja o polinomima i njihovim nultočkama. U ovom predavanju pretpostavljamo da su se učenici već susreli s pojmom polinoma, ali na početku ponavljamo osnovne rezultate, koji bi mogli pomoći i mlađim učenicima koji još nisu dovoljno upoznati s tim gradivom.

Uvod/teorijske osnove

Teorem 1. *Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ polinom s koeficijentima u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Tada vrijedi $P(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ (drugim riječima, to je nulpolinom) ako i samo ako su mu svi koeficijenti a_i jednaki 0.*

Ovaj polinom ima veću važnost nego što to zvuči. Pomoću njega slijedi činjenica da su dva polinoma jednaka ako i samo ako imaju jednake stupnjeve, a svi koeficijenti su im jednaki.

Kad govorimo o kompleksnim nultočkama, osnovni teorem algebre kaže nam da svaki nekonstantni polinom ima barem jednu nultočku. Njegova posljedica (i posljedica svojstva dijeljenja polinoma) kaže sljedeće:

Teorem 2. *Polinom stupnja $n \geqslant 1$ ima točno n nultočaka (računajući i njihovu kratnost). Jedini polinom koji ima beskonačno mnogo nultočaka je $P(x) = 0$.*

Ovaj teorem često će se koristiti u zadatcima, pogotovo u drukčijoj formi: ako ste za neki polinom pretpostavili da je stupnja n, a otkrili ste da ima $n + 1$ nultočku, došli ste do kontradikcije – tada je to ili nulpolinom ili takav polinom ne postoji.

Ponovimo sad osnovno o dijeljenju polinoma.

Teorem 3. *Neka su f i g polinomi. Tada postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da je*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

i da je stupanj od r manji nego stupanj od f. Tada r zovemo ostatak pri dijeljenju f s g. Ako je $r(x) = 0$, kažemo da je f djeljiv s g.

Pretpostavljamo da ste dijeljenje u školi usavršili (Hornerovim algoritmom te "obično" dijeljenje). Također ste vrlo vjerojatno primijetili da je dijeljenje polinoma s ostatkom vrlo slično dijeljenju cijelih brojeva.

Sljedeća dva teorema također su bitna kod dijeljenja.

Teorem 4. *Kompleksan broj α je nultočka polinoma P ako i samo ako je $P(x)$ djeljiv polinomom $(x - \alpha)$.*

Teorem 5. *Neka polinom $Q(x)$ ima sve različite nultočke, i neka su to $x_1, x_2, \ldots x_n$. Polinom $P(x)$ djeljiv je polinomom $Q(x)$ ako i samo ako je $P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_n) = 0$ (tj. ako su mu brojevi $x_1, \ldots x_n$ nultočke).*

Gornji teorem govori kako brzo tražiti nultočke polinoma – kad se nađe jedna njegova nultočka, polinom se podijeli odgovarajućim linearnim polinomom, čime se dobiva polinom manjeg stupnja. Drugi teorem ubrzava taj proces ako znamo koja dva konkretna polinoma želimo podijeliti. Uvjet da su nultočke različite bitan je jer primjerice polinom $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ nije djeljiv polinomom $Q(x) = (x - 2)^2$, iako je $P(2) = 0$.

Sljedeći teorem pokazuje poantu traženja nultočaka.

Teorem 6. *Neka je* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$ *i neka su* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *sve njegove nultočke. Tada vrijedi*

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Kako je bitno naći nultočke polinoma, bilo bi dobro kad bi postojao neki algoritam za to. Nažalost, on ne postoji, ali ono što postoji jest suženi skup kandidata za nultočke – mi znamo koje cjelobrojne, racionalne i neke kompleksne nultočke dolaze u obzir.

Teorem 7. *Neka je* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Ako* $P(x)$ *ima racionalnu nultočku* $\frac{a}{b}$, *pri čemu je* $M(a, b) = 1$, *tada je* a_n *djeljiv s* b, *te je* a_0 *djeljiv s* a. *Ako je* $c, d \in \mathbb{Z}$ *i* $c + id$ *nultočka od* P, *tada* $c^2 + d^2$ *dijeli* a_0.

Teorem 8. *Neka je* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *polinom s realnim koeficijentima. Ako je* $z = a + bi$ *nultočka od* P, *tada je i* $\overline{z} = a - bi$ *također nultočka od* P.

Primjer 1. *Odredimo nultočke polinoma* $P(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 19x - 5$.

Rješenje. Iz teorema 2 znamo kako će ovaj polinom imati točno četiri nultočke. Iz teorema 7 možemo iščitati cjelobrojne kandidate za nultočku: ± 1, ± 2, ± 4, koji su ujedno i kandidati za brojnik racionalne nultočke. Kandidati za nazivnik racionalne nultočke su prema istom teoremu ± 1 i ± 3, što znači da su kandidati za racionalnu nultočku u konačnici $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$. Dijeljenjem početnog polinoma odgovarajućim polinomima manjeg stupnja (vidi teorem 4), ispitamo sve kandidate i vidimo da je -1 jedna cjelobrojna nultočka, a $\frac{1}{3}$ jedna racionalna nultočka. Dijeljenjem dobijemo polinom $x^2 - 7x - 4$, čije nultočke pronađemo na standardan način, tj. iz formule za nultočke kvadratne jednadžbe.

Sljedeći teorem daje nam najbitniju vezu između nultočki i i koeficijenata. Na redovnoj nastavi spominju se Vièteove formule kod kvadratne jednadžbe, a možda ste upoznati i s onima za polinome trećeg stupnja. No, one vrijede za sve polinome.

Teorem 9. *Neka je* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ *polinom (uz* $a_n \neq 0$*) i neka su* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *njegove nultočke. Tada vrijede Vièteove formule:*

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n-1}}{a_n} &= -(x_1 + x_2 + \ldots x_n) \\
\frac{a_{n-2}}{a_n} &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \\
\frac{a_{n-3}}{a_n} &= -\sum_{1 \leqslant i < j < k} x_i x_j x_k \\
&\vdots \\
\frac{a_0}{a_n} &= (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n
\end{aligned}$$

U praksi su najkorisnije formule za a_{n-1}, a_{n-2}, a_1 i a_0. Ostale se zbog očite kompliciranosti rjeđe koriste.

Ponekad na natjecanjima nailazimo na zadatke u kojima se riječ "polinom" nigdje eksplicitno ne pojavljuje, a rješavanje zadatka najelegantnije se izvodi upravo koristeći polinome.

Primjer 2. *Neka su* z_1, z_2 *i* z_3 *kompleksni brojevi za koje je* (i) $z_1 z_2 z_3 = 1$, (ii) $z_1 + z_2 + z_3 = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3}$. *Dokažite da je barem jedan od njih jednak* 1.

Rješenje. Glavna ideja ovdje je da konstruiramo neki (normirani) polinom. To će biti polinom $P(x) = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$. Znamo mu nultočke, ali mu znamo i neke koeficijente. Iz $z_1 z_2 z_3 = 1$, i Vièteovih formula, slobodni koeficijent polinoma jednak je -1, dakle oblika je $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$. Također, iz drugog uvjeta u zadatku dobijemo

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

Prema Vièteovim formulama to znači $a = -b$, pa smo dobili polinom $P(x) = x^3 + ax^2 - ax - 1$. Mi trebamo dokazati da je bar jedan od brojeva jednak 1. Kako je $P(1) = 1 + a - a - 1 = 0$, to povlači da je 1 nultočka polinoma P. Također, sve nultočke tog polinoma su z_1, z_2, z_3. Dakle, bar jedan od tih brojeva jednak je 1, što je i trebalo dokazati.

Sada dolazimo do možda najbitnijeg teoretskog dijela predavanja, samih simetričnih polinoma. Kad kažemo "simetrični polinomi", vjerojatno vam prvo na pamet padne polinom poput $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ i traženje njegovih nultočaka. Iako taj polinom ima lijepe nultočke te ga je moguće riješiti i samo pogađajući rješenja, uglavnom se zadatci ovakvog tipa rješavaju koristeći činjenicu da je izraz simetričan.

No, ovo nije svrha simetričnih polinoma. Pokušajmo naslutiti što bi još mogli biti simetrični polinomi. Sam pojam simetričnosti nam je intuitivno jasan – u gornjem primjeru polinoma vidimo da su koeficijenti redom $1, -3, 4, -3, 1$. Svi polinomi koje smo dosad spominjali bili su polinomi u jednoj varijabli. No, zašto ne bismo radili s polinomima koji ovise o više varijabli? Polinomi više varijabli su primjerice $P_1(x, y) = x^2 + y$, $P_2(x, y) = x^3y + xy^2 + 3x - 2y + 12$, $P_3(x, y, z) = x^2yz$.

(Primijetite da je takvo nešto bilo očekivano. U "kvadratu binoma", što znači "binom"? A što znači "trinom" u "kvadratu trinoma"? Moraju li binom i trinom ovisiti samo o jednoj varijabli? Ako znamo što je binom i što je trinom, što bi tada bio "polinom"?)

S druge strane, polinomi više varijabli u pravilu su nezanimljivi. Npr. za njih ne vrijedi svojstvo da samo nulpolinom može imati beskonačno mnogo nultočaka. Zanimljivi su jedino simetrični polinomi. No i s njima ste zapravo radili, a da niste znali.

Primjer 3. *Neka su x_1, x_2 nultočke polinoma $f(x) = x^2 - 9x + 23$. Izračunajte $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3$ i $x_1^4 + x_2^4$, bez računanja nultočaka polinoma.*

Rješenje. Iz Vièteovih formula znamo da je $x_1 + x_2 = 9, x_1x_2 = 23$. Nadalje, izraze koje trebamo izračunati možemo dobiti na sljedeći način:

$$x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 = x_1^2x_2^2(x_1 + x_2) = 23^2 \cdot 9 = 4761,$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (9^2 - 2 \cdot 23)^2 - 2 \cdot 23^2 = 167.$$

U prethodnom primjeru baratali smo izrazima x_1x_2, $x_1 + x_2$, $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3$ i $x_1^4 + x_2^4$. Primijetite da su sve to simetrični polinomi u dvije varijable (x_1 i x_2). Također, druga dva polinoma zapisali smo preko prva dva. Ta prva dva polinoma naoko izgledaju jednostavnije i ljepše od druga dva.

Definicija 1. *Polinomi $\sigma_1(x, y) = x + y$ i $\sigma_2(x, y) = xy$ zovu se* ***elementarni simetrični polinomi****.*

Imamo osjećaj da koji god da smo simetričan polinom u dvije varijable dobili u gornjem zadatku, da smo ga mogli izraziti preko elementarnih simetričnih polinoma. To uistinu i vrijedi, te je moguće dokazati:

Teorem 10. *Svaki simetričan polinom u dvije varijable moguće je zapisati pomoću elementarnih simetričnih polinoma.*

Sada nećemo provoditi cijeli dokaz, nego samo njegov dio. Dokaz se svede na dokazivanje tvrdnje za specifične polinome: $s_k(x, y) = x^k + y^k$, i to indukcijom. Sljedeća jednakost ključna je u dokazu:

$$s_k(x, y) = x^k + y^k = (x^{k-1} + y^{k-1})(x + y) - (x^{k-2} + y^{k-2})xy = s_{k-1}(x, y)\sigma_1(x, y) + s_{k-2}(x, y)\sigma_2(x, y)$$

Sada induktivno zaključimo da ako su s_{k-1} i s_{k-2} zapisivi preko elementarnih simetričnih polinoma, da je tada i s_k.

Naglasimo još jednom bitnu jednakost koju smo upravo iskoristili:

$$x^k + y^k = (x^{k-1} + y^{k-1})(x + y) - (x^{k-2} + y^{k-2})xy$$

Ta jednakost često se koristi u raznim zadatcima. Često je to glavna ideja u zadatku, te su ti zadatci teški samo zato što mnogi ne znaju gornji identitet.

Primjer 4. *Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $z + \frac{1}{z}$ cijeli broj. Dokažite da je tada $z^n + \frac{1}{z^n}$ cijeli broj za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Rješenje. Indukcijom. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$. Za $n = 2$ također vrijedi jer je $z^2 + \frac{1}{z^2} = (z + \frac{1}{z})^2 - 2$ sigurno cijeli broj.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve k koji su manji od nekog $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo tvrdnju za n. No, i tada je traženi broj cijeli (koristimo gornji identitet i svojstvo da je umnožak/zbroj cijelih brojeva opet cijeli broj):

$$z^n + \frac{1}{z^n} = \left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right).$$

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Ako za neke realne brojeve a, b, c vrijedi $a \neq 0$ i $c(a - b + c) < 0$, dokažite da je $b^2 \geqslant 4ac$.

Zadatak 2.
Neka je x_1 jedno rješenje jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, a x_2 rješenje jednadžbe $-ax^2 + bx + c = 0$. Dokažite da jednadžba $\frac{a}{2}x^2 + bx + c$ ima realna rješenja, od kojih je jedno strogo izmedu x_1 i x_2.

Rješenje.
Hint: pogledajte rješenje prethodnog zadatka.

Zadatak 3.
Paralelni pravci p_1 i p_2 sijeku parabolu $f(x) = ax^2 + bx + c$ u točkama A, B, odnosno C, D. Dokažite da je suma apscisa točaka A i B jednaka sumi apscisa točaka C i D.

Zadatak 4.
Neka su a, b, c kompleksni brojevi za koje vrijedi

$$a + b + c = 0, \qquad ab + bc + ca = 0.$$

Dokažite da je $|a| = |b| = |c|$.

Zadatak 5.
Realni brojevi a, b, c, d zadovoljavaju jednakosti

$$abc - d = 1, bcd - a = 2, cda - b = 3, dab - c = -6.$$

Dokažite da tada vrijedi $a + b + c + d \neq 0$.

Zadatak 6.
Riješite sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 9 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 41 \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 225 \end{aligned}$$

Zadatak 7.
Odredite sve parove $(x,\, y)$ cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x^2 (y - 1) + y^2 (x - 1) = 1.$$

Zadatak 8.
Dokažite da je

$$\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)^n$$

neparan broj za svaki pozitivan cijeli broj n.

Zadatak 9.
Pronađite sve polinome koji imaju samo realne nultočke, a svi koeficijenti su im ± 1.

Rješenja nekih zadataka

Rješenje zadatka 1. Uvedimo kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$. Kako je $a \neq 0$, to je zasigurno kvadratna funkcija (a ne linearna). Primijetimo da uvjet iz zadatka znači $f(0) \cdot f(-1) < 0$. Time zaključujemo da funkcija na segmentu $[-1, 0]$ mijenja predznak, dakle tu se nalazi neparno mnogo nultočaka. Kako imamo kvadratnu funkciju, ovdje imamo jednu realnu nultočku. Prema tome, jednadžba $f(x) = 0$ ima rješenja realna rješenja, pa joj je odgovarajuća diskriminanta veća ili jednaka od nule, što je u konačnici i trebalo pokazati.

Rješenje zadatka 3. Neka su ti pravci dani formulama $y = kx + l_1$ i $y = kx + l_2$. Koordinate točaka A i B dobijemo rješavanjem sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice: $y = kx + l_1,\ y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Za apscise je dovoljno riješiti se nepoznanice y, pa dobijemo kvadratnu jednadžbu:

$$ax^2 + (b - k)x + (c - l_1) = 0.$$

To, kao što smo očekivali, ima dva rješenja, koja su ujedno apscise točaka sjecišta A i B. Suma koordinata je $\frac{k-b}{2a}$. Ako ponovimo isti postupak za pravac p_2, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$ax^2 + (b - k)x + (c - l_2) = 0.$$

Vièteova formula za sumu apscisa sjecišta C i D daje isti rezultat kao i za sjecišta A i B, dakle sume apscisa su jednake.

Rješenje zadatka 4. Uvedimo polinom $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$. Prema Vièteovim formulama (iz uvjeta zadatka) znamo da je samo slobodni koeficijent (uz naravno vodeći) netrivijalan. Dakle, polinom je oblika

$$P(x) = x^3 + C.$$

Sada za sve $x \in \{a, b, c\}$ (dakle, sve nultočke polinoma P) vrijedi

$$P(x) = 0 \implies x^3 = -C \implies |x|^3 = |x^3| = |-C| \implies |x| = \sqrt[3]{|-C|} = \sqrt[3]{|C|}.$$

Dakle, $|a| = |b| = |c| = \sqrt[3]{|C|}$, što je i trebalo pokazati.

Rješenje zadatka 5. Hint: rješenje je slično prethodnom zadatku. Pretpostavit ćemo suprotno, da vrijedi da je suma brojeva a, b, c, d jednaka nula. Kad sumiramo uvjete dobijemo da je još jedan Vièteov izraz jednak nuli. Tada naš polinom ima netrivijalne članove samo uz parne potencije, pa znamo riješiti bikvadratnu jednadžbu. Poznavajući njena rješenja, dobivamo kontradikciju.

Rješenje zadatka 6. Iz druge i prve jednadžbe dobivamo da je

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2}\left((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right) = 20.$$

Kombinirajući neke poznate identitete dobit ćemo i umnožak koeficijenata. Uvedimo supstituciju

$$S = a^2b + b^2a + c^2b + b^2c + a^2c + c^2a.$$

Tada imamo

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) = (a^3 + b^3 + c^3) + S,$$
$$(ab + bc + ca)(a + b + c) = S + 3abc,$$
$$\implies abc = \frac{1}{3}\left((ab + bc + ca)(a + b + c) - (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) + (a^3 + b^3 + c^3)\right) = 12$$

Dobili smo vrijednosti tri simetrična polinoma za realne brojeve a, b, c. Prema tome, oni su nultočke polinoma

$$P(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12$$

Sad trebamo odrediti nultočke ovog polinoma. Znamo kako se one traže, prvo tražimo kandidate među djeliteljima slobodnog člana. Brzo imamo sreće jer je $x = 1$ već rješenje. Dijeljenjem polinoma imamo

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 8x + 12).$$

Ovaj drugi faktor je kvadratna jednadžba s korijenima 2 i 6. Dakle, sva rješenja početnog sustava su $(1, 2, 6)$ i sve permutacije te trojke.

Rješenje zadatka 7. Uvođenjem supstitucija $a = x + y$, $b = xy$ dobivamo jednadžbu

$$ab - a^2 + 2b = 1 \implies b = \frac{a^2+1}{a+2} = \frac{a^2 + 2a - 2a - 4 + 4 - 4}{a+2} = a - 2 + \frac{5}{a+2}.$$

Dakle, $a + 2$ mora biti djelitelj od 5, pa a mora biti jedan od brojeva $-7, -3, -1, 3$. U tim slučajevima, za b dobivamo redom $-10, -10, 2, 2$. Za svaki od ta četiri slučaja rješavamo odgovarajuću kvadratnu jednadžbu. Samo u dva slučaja dobivamo cjelobrojna rješenja. Sva rješenja su $(1, 2), (2, 1), (2, -5), (-5, 2)$.

Rješenje zadatka 8. Označimo s a, b brojeve

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$$

redom. Koristeći formulu za simetrične polinome u dvije varijable, dobivamo:

$$ab = -2,\ a + b = 3,\ a^{n+2} + b^{n+2} = 3(a^{n+1} + b^{n+1}) + 2(a^n + b^n).$$

Sada lako dovršavamo zadatak indukcijom: Za slučaj $n = 1$ imamo da je $a + b = 3$ neparan, za $n = 2$, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 13$ je neparan. Za ostale n, gledamo izvedenu rekurzivnu formulu:

$$a^{n+1} + b^{n+1} = 3(a^n + b^n) + 2(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

Prema pretpostavci indukcije, imamo da je prvi sumand na lijevoj strani neparan, a za drugi znamo da je paran, pa je i cijela suma neparan prirodan broj, što je i trebalo pokazati.

Rješenje zadatka 9. Pretpostavimo da je vodeći koeficijent jednak 1. Ostale polinome dobijemo množeći ostale s -1.

Ideja je iskoristiti $A - G$ nejednakost. Nju možemo iskoristiti ako znamo da su brojevi na koje primjenjujemo nejednakost nenegativni realni bojevi (formalno, moraju biti pozitivni, ali ako je jedan od brojeva nula, onda je geometrijska sredina jednaka nuli, a aritmetička je nenegativna, pa nejednakost i dalje vrijedi). To je istina, uz pretpostavku da smo uzeli neki polinom iz teksta zadatka, za kvadrate nultočaka $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$. Dakle, vrijedi

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 + \ldots + x_n)^2 - 2\left(\sum_{i<j} x_i x_j\right) \geqslant n\sqrt[n]{x_1^2 \cdots x_n^2}.$$

Prema Vièteovim formulama, upravo smo dobili da je

$$1 - 2 \cdot (\pm 1) \geqslant n \cdot 1.$$

Odavde, kao prvo, dobivamo da je $n \leqslant 3$. Slučaj $n = 1$ je trivijalan: oba polinoma $(x - 1)$, $(x + 1)$ su rješenje. U slučaju $n = 2$, iz gornje nejednakosti dobivamo da mora biti $x_1 x_2 = -1$. Lakom provjerom dobivamo da su oba polinoma $x^2 \pm x - 1$ rješenje.

Konačno, u slučaju $n = 3$ mora biti $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1$. Dakle, dolaze u obzir samo polinomi $x^3 \pm x^2 - x \mp 1$ i $x^3 \pm x^2 - x \pm 1$. Prvi par polinoma lako se faktorizira: $(x^2 - 1)(x \pm 1) = 0$. Drugi par nam neće dati rješenje. To vidimo zato što prema $A - G$ nejednakosti nužno moramo imati jednakost. To će biti ako za sve nultočke polinoma P vrijedi da im je kvadrat jednak 1. No ni $x_0 = 1$ ni $x_0 = -1$ nisu nultočke zadnjeg para polinoma, pa nam zadnji par ne daje rješenje.

Dakle, sva rješenja dana su s $x \pm 1$, $x^2 \pm x - 1$, $x^3 \pm x^2 - x - \mp 1$