MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Kombinatorna geometrija

6.3.2016.

Uvod/teorijske osnove

Ugrubo, kombinatorna geometrija je grana matematike koja se bavi konačnim skupovima geometrijskih objekata (točaka, pravaca, mnogokuta,...) i odnosima između tih objekata. Te odnose pokušava opisati pomoću nekih kombinatornih činjenica i principa te zato ovo područje spaja geometriju i kombinatoriku. Iako su nekad formulirani vrlo jednostavno, zadatci iz ovog područja mogu biti vrlo komplicirani, kako na natjecanjima, tako i u matematici općenito.

Cilj ovog predavanja jest pokazati neke osnovne probleme kombinatorne geometrije. Za to će nam trebati neke činjenice iz kombinatorike i geometrije. Neke od njih, poput Dirichletovog principa i karakterističnih točaka, možete ponoviti iz prethodnih predavanja, a neke ćemo sad navesti.

- Nasuprot veće stranice trokuta leži veći kut i obrnuto, nasuprot većeg kuta u trokutu leži veća stranica.
- *Nejednakost trokuta:* ukoliko su a, b, c duljine stranica trokuta, onda vrijede sljedeće nejednakosti:

  $$a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b.$$

  Drugim riječima, duljina jedne stranice trokuta manja je od zbroja duljina preostalih dviju stranica.
- *Princip ekstremnog.* U skupu od konačno mnogo objekata koji imaju neku veličinu tražimo onaj s ekstremnom (najvećom ili najmanjom) veličinom i promatramo taj objekt. Ovaj princip često se koristi kada dokazujemo da postoji objekt s nekim određenim svojstvom (u zadatcima iz kombinatorne geometrije možemo npr. u zadanom skupu četverokuta promatrati onaj s najvećom/najmanjom površinom ili opsegom).

U sljedećim ćemo zadatcima pokazati neke ideje kod rješavanja zadataka iz ovog područja.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
U koordinatnom je sustavu u ravnini dano pet točaka s cjelobrojnim koordinatama. Dokažite da polovište barem jedne od dužina određenih tim točkama ima cjelobrojne koordinate.

Rješenje.
Ukoliko krajevi dužine imaju koordinate (x_1, y_1) i (x_2, y_2), onda su koordinate (x_0, y_0) polovišta te dužine dane s

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Odavde uočavamo kako će koordinate polovišta biti cjelobrojne ako i samo ako su odgovarajuće koordinate krajnjih točaka te dužine iste parnosti. Nadalje, uočimo da za svaku točku imamo ukupno 4 moguće kombinacije za parnost njenih koordinata ((P,P), (N,P), (P,N), (N,N)). Budući da ukupno imamo 5 točaka, prema Dirichletovom principu slijedi kako postoje 2 točke koje imaju odgovarajuće koordinate iste parnosti. Dužina kojoj su krajevi te dvije točke jest tražena dužina.

Zadatak 2.
Koliko bismo najmanje točaka s cjelobrojnim koordinatama trebali zadati u prostoru kako bismo mogli izvesti isti zaključak kao u zadatku 1?

Zadatak 3.
Neka su P_1, P_2, P_3, P_4 i P_5 točke u untrašnjosti kvadrata stranice duljine 1. Dokažite da među tim točkama postoje točke P_i, P_j za čiju udaljenost vrijedi

$$d(P_i, P_j) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zadatak 4.
Unutar kruga promjera 1 raspoređena je 51 točka. Dokažite da se među uočenim točkama mogu naći 3 koje se mogu smjestiti u krug radijusa $\frac{1}{7}$.

Rješenje.
Uputa: smjestite čitav krug u kvadrat stranice 1 i podijelite ga na 25 sukladnih kvadrata stranice $\frac{1}{5}$.

Zadatak 5.
Dokažite da ravninu možemo obojati u 9 različitih boja tako da je udaljenost između bilo kojih dviju točaka iste boje različita od 2016.

Zadatak 6.
U ravnini je dano $2n$ točaka – n plavih i n crvenih, pri čemu nikoje tri ne leže na istom pravcu. Dokažite da se može postaviti n dužina koje će kao krajeve imati plavu i crvenu točku, i to tako da se nikoje dvije dužine ne sijeku.

Rješenje.
Ukupno imamo $n!$ različitih spajanja. Naime, ako plave točke označimo brojevima $1, \ldots, n$ i crvene također označimo istim brojevima, onda svako spajanje tih točaka možemo shvatiti kao preslikavanje koje svakom broju iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ pridružuje točno jedan broj iz tog istog skupa (i različitim brojevima pridružuje različite brojeve). No, svako takvo preslikavanje možemo shvatiti kao da elemente skupa $\{1, \ldots, n\}$ redamo u niz (u nekom poretku), a to možemo napraviti na $n!$ načina: prvi član niza biramo na n načina, drugi na $n-1$ način i tako do zadnjeg koji biramo na 1 način. Zato to možemo napraviti na ukupno $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ načina. Ono što nam je zapravo bilo bitno jest da postoji **konačno mnogo** načina na koje to možemo napraviti.
Između njih odaberemo ono spajanje $\mathcal{E}$ koje ima najmanju sumu duljina n dužina (znamo da takvo postoji jer tih spajanja ima konačno mnogo). Pretpostavimo da postoje dvije dužine koje se sijeku i označimo ih s $\overline{P_1C_1}, \overline{P_2C_2}$ (pritom su P_1, P_2 plave, a C_1, C_2 crvene točke).
Ukoliko te dužine zamijenimo dužinama $\overline{P_1C_2}, \overline{P_2C_1}$, dobit ćemo spajanje $\mathcal{E}'$ koje ima manju ukupnu duljinu dužina. Naime, ukoliko označimo sjecište dužina $\overline{P_1C_1}, \overline{P_2C_2}$ sa S, prema nejednakosti trokuta primijenjenoj na trokute P_1C_2S i P_2C_1S slijede nejednakosti

$$|P_1C_2| < |P_1S| + |C_2S|,$$
$$|P_2C_1| < |P_2S| + |C_1S|.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti imamo

$$|P_1C_2| + |P_2C_1| < (|P_1S| + |C_1S|) + (|C_2S| + |P_2S|) = |P_1C_1| + |P_2C_2|.$$

Ovo je u kontradikciji s odabirom spajanja. Dakle, $\mathcal{E}$ je traženo spajanje.

Zadatak 7.
Zadano je 2016 točaka u ravnini od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Pokažite da se one mogu spojiti izlomljenom zatvorenom linijom koja samu sebe ne presijeca.

Rješenje.
Uputa: slično kao u prethodnom zadatku, uočite da izlomljenih linija koje spajaju te točke ima konačno mnogo (koliko ih ima?) te dokažite da je tražena izlomljena zatvorena linija ona koja ima najmanju moguću duljinu.

Zadatak 8.
(**Sylvester-Gallai-Erdös**) Dano je n točaka u ravnini tako da ne pripadaju sve istom pravcu. Pokažite da postoji pravac koji prolazi kroz točno dvije od tih n točaka.

Zadatak 9.
U ravnini je dano 2016 točaka takvih da svake tri zatvaraju trokut površine najviše 1. Dokažite da postoji trokut površine 4 koji sadrži sve dane točke.

Zadatak 10.
Nad svakom stranicom konveksnog četverokuta konstruiran je krug (tj. stranice četverokuta su promjeri tih krugova). Dokažite da ti krugovi prekrivaju čitav četverokut.

Rješenje.
Uputa. Najprije pokažite sljedeću pomoćnu tvrdnju:

> Neka su točke A i B krajnje točke promjera kružnice k. Ako je točka T takva da $\sphericalangle ATB \geqslant 90^\circ$, onda se T nalazi unutar k ili na njoj (tj. u krugu određenom sa k).

Usput, vrijedi li obrat ove tvrdnje?

Zadatak 11.
U nekoj državi postoji 2016 aerodroma i njihove međusobne udaljenosti su sve različite. Sa svakog aerodroma polijeće avion i slijeće na njemu najbliži aerodrom. Koliko najviše aviona može sletjeti na jedan aerodrom?

Rješenje.
Uputa: ako malo bolje pogledate dosadašnja predavanja iz kombinatorike, među zadatcima iz tih predavanja prepoznat ćete i zadatak vrlo sličan ovome, a u potpunosti je riješen.

Zadatak 12.
Dano je 9 pravaca takvih da svaki od njih dijeli dani kvadrat na dva četverokuta čije se površine odnose kao 2 : 3. Dokažite da najmanje 4 od tih pravaca prolaze istom točkom.

Rješenje.
Uputa: ovaj se zadatak može relativno elegantno riješiti analitičkom metodom (tj. smještanjem u koordinatni sustav).

Rješenja ostalih zadataka

Rješenje zadatka 2. Uočimo da u prostoru svaka točka ima 3 koordinate pa ukupno postoji $2^3 = 8$ mogućih kombinacija za parnost njenih koordinata:

$$\begin{matrix} \text{(P,P,P)}, & \text{(P,N,P)}, & \text{(N,P,P)}, & \text{(N,N,P)}, \\ \text{(P,P,N)}, & \text{(P,N,N)}, & \text{(N,P,N)}, & \text{(N,N,N)}. \end{matrix}$$

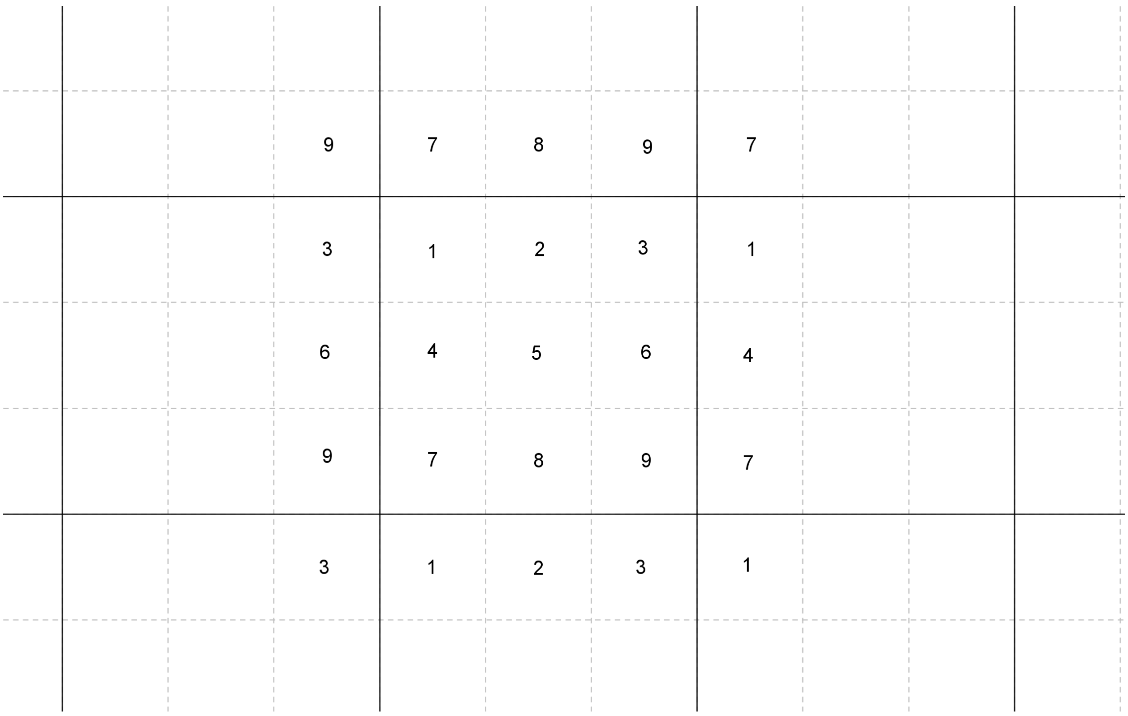
Dakle, da bismo mogli primijeniti Dirichletov princip, potrebno je zadati najmanje 9 točaka u prostoru. Analogno, na pravcu je za isti zaključak potrebno zadati najmanje $2^1 + 1 = 3$ točke.

Rješenje zadatka 3. Uputa: podijelite kvadrat na 4 sukladna kvadrata tako da povučete dužine koje spajaju polovišta dviju nasuprotnih stranica kvadrata. Uočite da je najveća moguća udaljenost dvije točke u svakom od tih kvadrata upravo jednaka $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i primijenite Dirichletov princip.

Rješenje zadatka 4. Najprije postupite kao što je napisano u uputi. Prema Dirichletovom principu slijedi da postoji jedan od tih 25 kvadrata u kojemu se nalaze barem 3 točke. No, tom se kvadratu može opisati kružnica čiji je radijus jednak polovici duljine dijagonale kvadrata, dakle

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}.$$

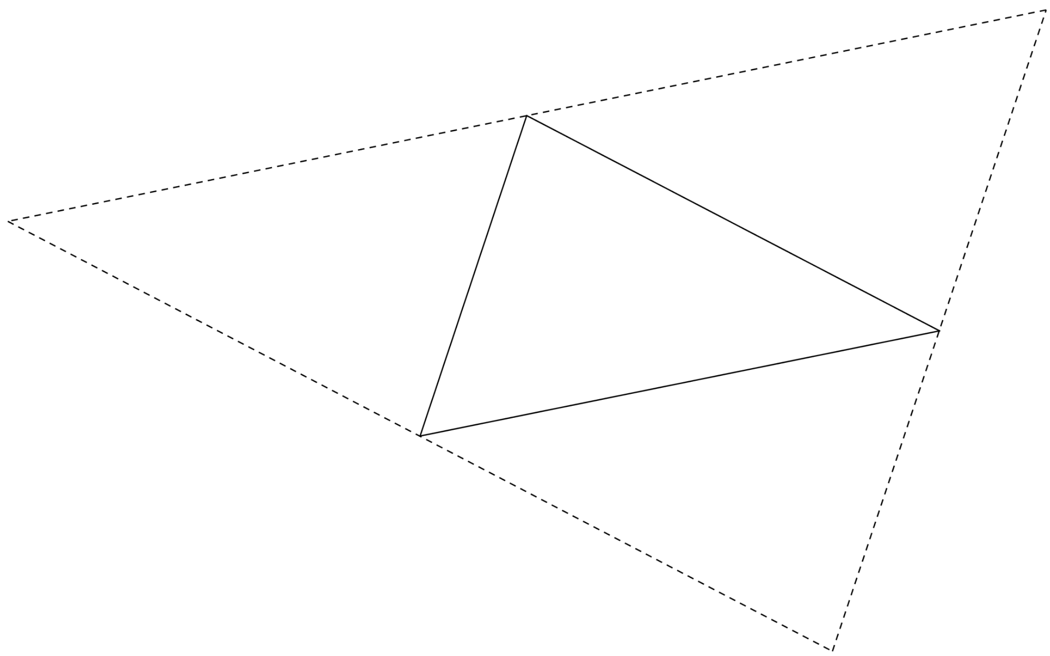
Rješenje zadatka 5.



Podijelimo ravninu na kvadrate stranice a (koji ćemo kasnije odrediti) te svaki veći kvadrat $3a \times 3a$ obojimo u 9 različitih boja kao na slici (gdje smo boje zamijenili brojevima od 1 do 9). Tada je udaljenost dvije točake iste boje ili manja od $a\sqrt{2}$ (ako se te dvije točke nalaze u istom kvadratu stranice a), ili je veća od $2a$ (ako se nalaze u različitim kvadratima stranice a). Ako sada uzmemo npr. $a = 1009$, tada vrijedi $a\sqrt{2} < 2016 < 2a$, pa vidimo da je ovakvim bojanjem udaljenost svake dvije točke iste boje različita od 2016.

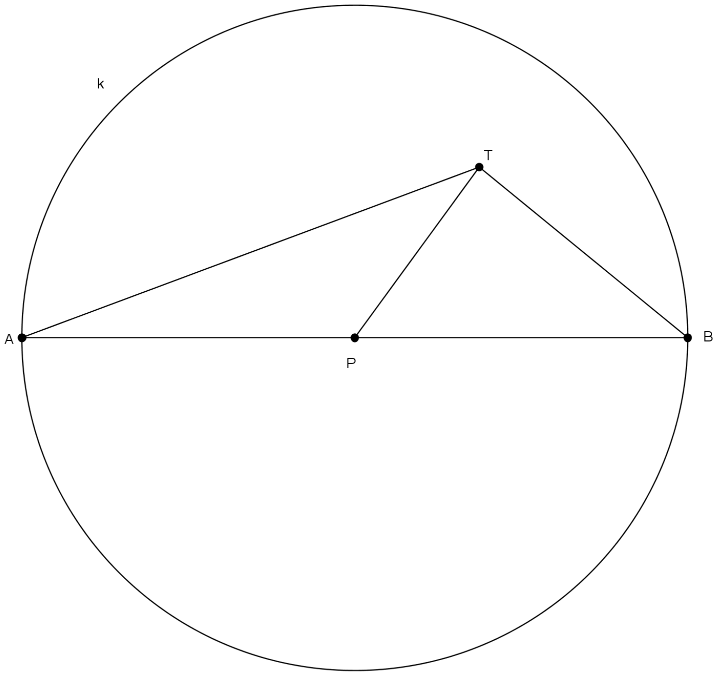
Rješenje zadatka 8. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki pravac koji prolazi kroz dvije točke postoji i treća točka na tom pravcu. Promatrajmo parove (T, p), pri čemu je p pravac koji prolazi kroz neke dvije točke, a T točka koja nije na tom pravcu. Od svih tih parova odaberemo onaj koji ima najmanju udaljenost između T i p (takav sigurno postoji jer takvih uređenih parova ima konačno mnogo).
Neka je N nožište okomice iz T na p. Po pretpostavci na p postoje barem tri točke A, B, C. Dvije od njih nalaze se na istoj strani od N; neka su to (bez smanjenja općenitosti) A, B. Neka je također (bez smanjenja općenitosti) B ona bliža N. Tada je udaljenost od B do pravca AT manja od udaljenosti T do p. Kontradikcija.

Rješenje zadatka 9.



Budući da postoji konačno mnogo trokuta kojima su vrhovi zadane točke, među njima postoji i trokut maksimalne površine. Promatrajmo taj trokut i označimo ga sa τ; znamo da je njegova površina najviše jednaka 1. Kroz svaki vrh tog trokuta povucimo pravac paralelan s nasuprotnom stranicom kao na slici. Time dobijemo još tri trokuta sukladna polaznom pa je površina novonastalog trokuta najviše jednaka $4 \cdot 1 = 4$ (za dodatno objašnjenje ovih činjenica može vam pomoći dokaz teorema 3 iz predavanja o karakterističnim točkama trokuta). Tvrdimo da novonastali veći trokut sadrži svih 2016 točaka. Naime, ako se neka točka T nalazi izvan tog trokuta, onda promotrimo trokute čiji su vrhovi točka T i dva vrha trokuta τ. Barem jedan od ta tri trokuta ima površinu veću od τ jer ima dužu visinu na odgovarajuću stranicu od τ (prisjetite se predavanja o površinama u geometriji; također, odredite gdje se sve u odnosu na stranice većeg trokuta može nalaziti točka T pa u ovisnosti o tim slučajevima detaljno argumentirajte posljednju tvrdnju). No, time smo dobili kontradikciju s odabirom trokuta τ (kao trokuta s najvećom mogućom površinom).
Dakle, dobiveni trokut zaista sadrži sve zadane točke.

Rješenje zadatka 10.



Dokažimo najprije pomoćnu tvrdnju. Ukoliko je $\sphericalangle ATB = 90°$, tada T leži na k (prema kojem teoremu?). Zato pretpostavimo da je $\sphericalangle ATB > 90°$. Tvrdimo da u tom slučaju T leži unutar k.
Pretpostavimo suprotno. Budući da T ne može ležati na k (zašto?), ona prema pretpostavci leži izvan k. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$ (tj. središte kružnice k). Budući da T leži izvan k, duljina dužine $\overline{PT}$ veća je od radijusa kružnice k, tj.

$$|PT| > |AP|, \ |PT| > |BP|.$$

No, budući da u trokutu nasuprot veće stranice leži veći kut, slijedi

$$\sphericalangle TAP > \sphericalangle ATP, \ \sphericalangle TBP > \sphericalangle BTP.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\sphericalangle TAP + \sphericalangle TBP > \sphericalangle ATP + \sphericalangle BTP = \sphericalangle ATB,$$

tj.

$$\sphericalangle TAB + \sphericalangle TBA > \sphericalangle ATB.$$

Budući da je zbroj kutova u trokutu jednak $180°$, slijedi

$$180° - \sphericalangle ATB > \sphericalangle ATB,$$

a odavde dobivamo

$$\sphericalangle ATB < 90°.$$

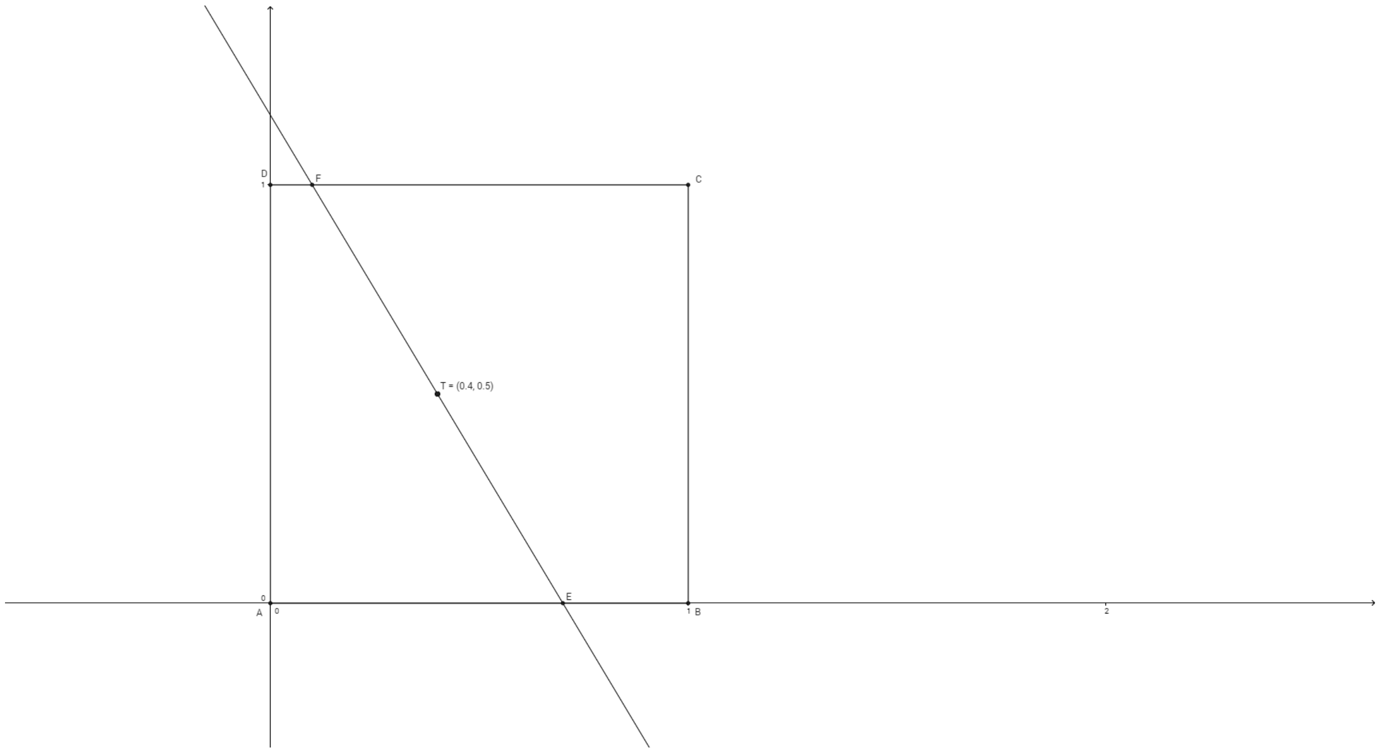
Kontradikcija s pretpostavkom $\sphericalangle ATB > 90°$. Ovime je dokazana pomoćna tvrdnja.

Sada možemo dokazati tvrdnju zadatka. Označimo vrhove četverokuta redom sa A, B, C, D. Neka je T bilo koja točka u unutrašnjosti četverokuta. Vrijedi

$$\sphericalangle ATB + \sphericalangle BTC + \sphericalangle CTD + \sphericalangle DTA = 360°,$$

pa je barem jedan od tih kutova veći ili jednak $90°$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je to kut $\sphericalangle ATB$. Tada prema pomoćnoj tvrdnji direktno slijedi da se točka T nalazi u krugu konstruiranom nad stranicom $\overline{AB}$ četverokuta. Dakle, zadani krugovi zaista pokrivaju čitav četverokut.

Rješenje zadatka 12.



Označimo vrhove kvadrata redom sa A, B, C, D i postavimo koordinatni sustav tako da točke A, B, C imaju redom koordinate $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$ (kao na slici).
Ako neki pravac dijeli kvadrat na dva četverokuta, onda taj pravac mora sjeći dvije nasuprotne stranice kvadrata (i tada dijeli kvadrat na dva pravokutna trapeza). Pretpostavimo (bez smanjenja općenitosti) da pravac siječe stranice $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ kvadrata redom u točkama $E = (x_1, 0)$ i $F = (x_2, 1)$. Budući da je omjer površina trapeza $AEFD$ i $EBCF$ jednak $2 : 3$ (i to su pravokutni trapezi s duljinom visine jednake 1), iz formule za površinu trapeza slijedi

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \cdot 1}{\frac{1}{2}(1 - x_1 + 1 - x_2) \cdot 1} &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2 - (x_1 + x_2)} &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow x_1 + x_2 &= \frac{4}{5}. \qquad (1)\end{aligned}$$

(uočimo da bismo istu jednakost dobili i da smo pretpostavili da je $P(EBCF) : P(AEFD = 2 : 3)$.
Nadalje, znamo da je jednadžba pravca EF

$$y - 0 = \frac{1 - 0}{x_2 - x_1}(x - x_1) \Rightarrow y = \frac{1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

No, ako iskoristimo relaciju (1), vidimo da tu jednadžbu možemo zapisati samo pomoću x_1:

$$y = \frac{1}{\frac{4}{5} - 2x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{5} - x_1}(x - x_1).$$

No, iz posljednje jednadžbe direktno vidimo da pravac EF mora prolaziti točkom $T = (\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ koja ne ovisi o odabiru točaka E i F.
Dakle, svaki pravac koji siječe stranice $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ kvadrata i dijeli površinu tog kvadrata u omjeru $2 : 3$ mora prolaziti točkom $T = (\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$. Potpuno analognim računom (ili direktno, zbog simetrije) možemo zaključiti da svaki pravac koji siječe stranice $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ kvadrata i dijeli njegovu površinu u omjeru $2 : 3$ mora prolaziti točkom $S = (\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$. Dakle, svaki od tih pravaca prolazi točkom T ili S pa tvrdnja slijedi primjenom Dirichletovog principa.
Razmislite kako biste riješili ovaj zadatak bez korištenja koordinatnog sustava.