MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Cauchy-Schwarzova nejednakost

20.3.2016.

Uvod

Dosad ste se upoznali s osnovnim nejednakostima među sredinama, tzv. $KAGH$ nejednakostima, te ćemo podrazumijevati da ste usvojili znanja iz tog predavanja. U ovom ćemo predavanju predstaviti još jednu važnu nejednakost u matematici, Cauchy-Schwarzovu nejednakost.

Teorem 1 (Cauchy-Schwarzova nejednakost)**.** *Neka su $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ proizvoljni realni brojevi. Tada vrijedi nejednakost*

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2. \tag{CS}$$

Jednakost se u gornjoj nejednakosti postiže ako i samo ako su n-torke $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ proporcionalne, tj. postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$a_i = \lambda b_i, \ i = 1, \ldots, n.$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost ima lijep elementaran dokaz koji ćemo ovdje pokazati. Ipak, napominjemo da su za shvaćanje ovog dokaza potrebna neka osnovne činjenice o kvadratnoj funkciji koja se uče u 2. razredu (te da nam za daljnje rješavanje zadataka vezanih uz ovu nejednakost njen dokaz, kao ni spomenute činjenice, neće trebati).

Dokaz Cauchy-Schwarzove nejednakosti. Promatrajmo funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + \left(2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Budući da vrijedi $f(x) \geqslant 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, diskriminanta ove kvadratne funkcije mora biti manja ili jednaka nuli pa imamo

$$4(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \leqslant (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2).$$

Ukoliko vrijedi jednakost, onda je diskriminanta funkcije f jednaka nuli, pa f ima dvostruku nultočku $x_0 \in \mathbb{R}$, odnosno

$$\sum_{i=1}^{n}(a_ix_0 + b_i)^2 = 0 \Leftrightarrow a_ix_0 + b_i = 0, \ i = 1, \ldots, n$$
$$\Leftrightarrow b_i = -a_ix_0, \ i = 1, \ldots, n,$$

pa vidimo da su n-torke $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ proporcionalne.
Obratno, ukoliko postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $b_i = \lambda a_i, \ i = 1, \ldots, n$, slijedi

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix + \lambda a_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)(x + \lambda)^2,$$

pa vidimo da f ima u $-\lambda$ dvostruku nultočku. Dakle, diskriminanta od f je jednaka nuli, tj. vrijedi jednakost u gornjoj nejednakosti.

Prije nego što nastavimo sa zadatcima vezanima uz Cauchy-Schwarzovu nejednakost, napomenimo još par stvari. Cauchy-Schwarzova nejednakost se u literaturi ponekad naziva i nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog. Ako Internetu tražite Cauchy-Schwarzovu nejednakost, vjerojatno ćete naići na nejednakost koja (na prvi pogled) nema veze s ovom koju smo gore naveli. Razlog tome jest što se u (visokoškolskoj) matematici pod Cauchy-Schwarzovom nejednakosti podrazumijeva nejednakost dosta općenitija od one koju smo iskazali u teoremu (točnije, nejednakost (CS) jest specijalan slučaj te općenitije nejednakosti) i za shvaćanje te nejednakosti potrebno je razumijevanje nekih pojmova koji se obično uče na prvoj godini studija matematike i srodnih područja. Ipak, Cauchy-Schwarzova nejednakost je jedan od osnovnih (i prvih) rezultata s kojim se susretne svatko tko ozbiljnije proučava matematiku.

Zadatak 1.
Pomoću Cauchy-Schwarzove nejednakosti možemo dokazati i neke nejednakosti među sredinama. Uzimanjem proizvoljnih nenegativnih realnih brojeva $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1 = \ldots = b_n = 1$ te korištenjem Cauchy-Schwarzove nejednakosti dokažite KA nejednakost. Slično, za proizvoljne pozitivne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1 = \frac{1}{a_1}, \ldots, b_n = \frac{1}{a_n}$ dokažite AH nejednakost.

Riješeni zadatci

Sada ćemo pokazati kako se sve Cauchy-Schwarzova nejednakost primjenjuje u dokazivanju nejednakosti u natjecateljskim zadatcima.

Zadatak 2.
Neka su $a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi, a $b_1, \ldots, b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n}.$$

Rješenje.
Vrijedi

$$\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \right)^2 \right) \left(\left(\sqrt{b_1} \right)^2 + \left(\sqrt{b_2} \right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{b_n} \right)^2 \right) \overset{CS}{\geqslant} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2,$$

pa zadana nejednakost slijedi dijeljenjem s $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Nejednakost iz prethodnog zadatka je tzv. **Engel forma** Cauchy-Schwarzove nejednakosti i ona se također često koristi kod dokazivanja nejednakosti.

Zadatak 3.
(**Nesbittova nejednakost**, drugi put) Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Rješenje.
Nejednakost je ekvivalentna s

$$\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geqslant \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geqslant \frac{9}{2}.$$

No vrijedi

$$((b+c) + (c+a) + (a+b)) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \overset{CS}{\geqslant} 9,$$

a odavde slijedi posljednja nejednakost.

Uočimo kako smo u prethodnom zadatku Cauchy-Schwarzovu nejednakost iskoristili kako bismo se "riješili nazivnika" u dugom faktoru posljednje nejednakosti. Ovo je vrlo česta primjena Cauchy-Schwarzove nejednakosti i u sljedećem ćemo zadatku napraviti sličnu stvar.

Zadatak 4.
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite nejednakost

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Prvo rješenje.

$$\left(\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}\right)(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)) \overset{CS}{\geqslant} \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{\frac{(ab+bc+ca)^2}{(abc)^2}}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2} \overset{AG}{\geqslant} \frac{3}{2}\sqrt[3]{(abc)^2} = \frac{3}{2}.$$

Drugo rješenje.
Uvedimo supstituciju

$$a = \frac{1}{x},\ b = \frac{1}{y},\ c = \frac{1}{z}.$$

Uočimo da je $xyz = 1$ i zadana nejednakost postaje

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Ova nejednakost slijedi iz Engel forme i AG nejednakosti

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}(x+y+z) \overset{AG}{\geqslant} \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}.$$

Zadatak 5.
Neka su x, y, z realni brojevi strogo veći od 1 takvi da je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Rješenje.
Vrijedi

$$\left(\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}\right)(x+y+z) \overset{CS}{\geqslant} \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x+y+z) \geqslant \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2,$$

a odavde slijedi zadana nejednakost.

Zadatak 6.
Neka je $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom s pozitivnim koeficijentima. Ukoliko vrijedi nejednakost

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{P(x)}$$

za $x = 1$, onda ta nejednakost vrijedi za svaki $x > 0$. Dokažite.

Rješenje.
Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n, \ldots, a_0 > 0$. Uvjet zadatka povlači

$$a_n + \ldots + a_0 \geqslant \frac{1}{a_n + \ldots + a_0} \Leftrightarrow (a_n + \ldots + a_0)^2 \geqslant 1.$$

Neka je sada $x > 0$ proizvoljan. Imamo

$$P\left(\frac{1}{x}\right)P(x) = \left(\frac{a_n}{x^n} + \ldots + a_0\right)(a_n x^n + \ldots + a_0) \overset{CS}{\geqslant} (a_n + \ldots + a_0)^2 \geqslant 1,$$

a odavde dijeljenjem s $P(x) > 0$ slijedi zadana nejednakost.

Zadatak 7.
Neka su $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ pozitivni realni brojevi i neka je $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Dokažite nejednakost

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + 2\sqrt{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(ab + bc + ca)} \leqslant a + b + c.$$

Prvo rješenje.

$$\begin{aligned}
&\alpha a + \beta b + \gamma c + 2\sqrt{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(ab + bc + ca)} \\
&\qquad \overset{CS}{\leqslant} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + \sqrt{2(ab + bc + ca)} \cdot \sqrt{2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)} \\
&\qquad \overset{CS}{\leqslant} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)} \\
&\qquad = (a + b + c) \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = a + b + c,
\end{aligned}$$

pri čemu smo primjenjivali Cauchy-Schwarzovu nejednakost najprije na trojke (a, b, c) i (α, β, γ), a zatim na $\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \sqrt{2(ab + bc + ca)}\right)$ i $\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \sqrt{2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}\right)$.

Drugo rješenje.
Nejednakost možemo dokazati i koristeći nejednakosti među sredinama. Naime, uočimo da ako nejednakost vrijedi za brojeve a, b, c, tada ona vrijedi i za brojeve ka, kb, kc, gdje je $k > 0$ proizvoljan (vrijedi i obrat, tj. nejednakost se ne mijenja ako brojeve a, b, c pomnožimo nekim realnim brojem k). Kažemo da je zadana nejednakost **homogena** po a, b, c. Zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a + b + c = 1$ (naime, ako je $a + b + c = s$, onda uzmemo $k = \frac{1}{s}$, tj. promatramo brojeve $\frac{a}{s}, \frac{b}{s}, \frac{c}{s}$ čiji je zbroj jednak 1 - ukoliko pokažemo da za ove brojeve vrijedi nejednakost, ona vrijedi i za početne a, b, c). Ovo općenito smijemo raditi kod homogenih nejednakosti (tj. onih nejednakosti koje se ne mijenjaju ukoliko varijable pomnožimo nekim realnim brojem).
Sada imamo

$$\begin{aligned}
\alpha a + \beta b + \gamma c + 2\sqrt{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(ab + bc + ca)} &\overset{AG}{\leqslant} (\alpha a + \beta b + \gamma c) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (ab + bc + ca) \\
&\overset{AG}{\leqslant} \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + a^2\right) + \frac{1}{2}\left(\beta^2 + b^2\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + c^2\right) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (ab + bc + ca) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)^2 + \frac{1}{2}(a + b + c)^2 = 1 = a + b + c.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.
Dokaži da za sve realne brojeve $x_1, \ldots, x_n$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Rješenje.
Označimo lijevu stranu nejednakosti sa L. Vrijedi

$$\begin{aligned}
L^2 &\overset{CS}{\leqslant} \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(\frac{1}{(1 + x_1^2)^2} + \ldots + \frac{1}{(1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2)^2}\right) \\
&\leqslant \left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(\frac{1}{1 + x_1^2} + \ldots + \frac{1}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right) \\
&< x_1^2 \cdot \frac{n}{1 + x_1^2} = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} \cdot n < n,
\end{aligned}$$

a odavde slijedi tražena nejednakost.

Zadatci za vježbu

Zadatak 9.
Neka su $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi i neka je $a_1 + \ldots + a_n = 1$. Dokažite nejednakosti

(a) $\dfrac{a_1}{x_1} + \ldots + \dfrac{a_n}{x_n} \geqslant \dfrac{1}{a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}$,

(b) $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leqslant \sqrt{a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2}$.

Zadatak 10.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $x + y + z = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Zadatak 11.
Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve $a, b, c > 0$ takve da je $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Zadatak 12.
Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, x, y, z vrijedi nejednakost

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geqslant \frac{3}{a+b}.$$

Zadatak 13.
Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

Zadatak 14.
Odredite najveću vrijednost realne konstante δ takve da za sve pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je

$$x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \geqslant 1$$

vrijedi nejednakost $x + y + z \geqslant \delta$.

Zadatak 15.
Neka su h_a, h_b, h_c duljine visina trokuta ABC i r duljina radijusa upisane kružnice tog trokuta. Dokažite nejednakost

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenja zadataka za vježbu

Rješenje zadatka 9.

(a) Primijenimo Cauchy-Schwarzovu nejednakost na n-torke $\sqrt{\frac{a_1}{x_1}}, \ldots, \sqrt{\frac{a_n}{x_n}}$ i $\sqrt{a_1 x_1}, \ldots, \sqrt{a_n x_n}$

$$\left(\frac{a_1}{x_1} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}\right)(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) \overset{CS}{\geqslant} (a_1 + \ldots + a_n)^2 = 1,$$

odakle slijedi zadana nejednakost.

(b) Primijenimo Cauchy-Schwarzovu nejednakost na n-torke $\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}$ i $\sqrt{a_1 x_1^2}, \ldots, \sqrt{a_n x_n^2}$

$$\left(a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2\right)(a_1 + \ldots + a_n) \overset{CS}{\geqslant} (a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n)^2,$$

odakle korjenovanjem slijedi zadana nejednakost.

Rješenje zadatka 10. Nejednakost slijedi direktno iz Engel forme

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}.$$

Rješenje zadatka 11. Primijenimo na lijevu stranu zadane nejednakosti Engel formu

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3^2}{3+ab+bc+ca} \geqslant \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Pritom smo koristili nejednakost $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ koja vrijedi za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Rješenje zadatka 12. Vrijedi

$$(x(ay+bz)+y(az+bx)+z(ax+by))\left(\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by}\right) \overset{CS}{\geqslant} (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(xy+yz+zx)\left(\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by}\right) \geqslant (x+y+z)^2.$$

Zbog nejednakosti $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ za $x, y, z \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$. Uvrštavanjem u posljednju nejednakost i dijeljenjem s $(a+b)(xy+yz+zx)$ dobivamo zadanu nejednakost.

Rješenje zadatka 13. Primijenit ćemo Engel formu. Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} &= \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+bd} + \frac{c^2}{cd+ac} + \frac{d^2}{ad+bd} \\
&\geqslant \frac{(a+b+c+d)^2}{ab+ac+bc+bd+cd+ac+ad+bd} \\
&= \frac{(a+b+c+d)^2}{(ab+ac+bd+cd)+(ac+bc+ad+bd)} \\
&= \frac{(a+b+c+d)^2}{(a+d)(b+c)+(a+b)(c+d)} \\
&\overset{AG}{\geqslant} \frac{(a+b+c+d)^2}{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 2.
\end{aligned}$$

Prvo rješenje zadatka 14. Vrijedi

$$\begin{aligned}\left(x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}\right)^2 &= \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{xyz}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{xyz}+\sqrt{z}\cdot\sqrt{xyz}\right)^2\\ &\overset{CS}{\leqslant} (x+y+z)\cdot 3xyz\\ &\overset{AG}{\leqslant} (x+y+z)\cdot\frac{(x+y+z)^3}{9}\\ &= \frac{1}{9}(x+y+z)^4.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $x+y+z\geqslant\sqrt{3}$. Budući da za $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ vrijedi $x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}=1$ i $x+y+z=\sqrt{3}$, očito je $\sqrt{3}$ najveći takav broj, tj. $\delta=\sqrt{3}$.

Drugo rješenje zadatka 14. Vrijedi

$$\begin{aligned}x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy} &= \sqrt{xyz}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\\ &\overset{AG}{\leqslant} \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}\right)^3\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\\ &= \frac{1}{27}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^4\\ &\overset{KA}{\leqslant} \frac{1}{27}\cdot 3^4\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2=\frac{1}{3}(x+y+z)^2.\end{aligned}$$

Sada kao u prvom rješenju slijedi $\delta=\sqrt{3}$.

Prvo rješenje zadatka 15. Neka je $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ poluopseg tog trokuta. Za površinu P tog trokuta vrijedi

$$P=rs=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}(h_a+h_b+h_c)(a+b+c) &\overset{CS}{\geqslant} (\sqrt{2P}+\sqrt{2P}+\sqrt{2P})^2=18P=18rs\\ &\Rightarrow (h_a+h_b+h_c)\cdot 2s\geqslant 18rs,\end{aligned}$$

a odavde slijedi zadana nejednakost.
Jednakost vrijedi kada se postiže jednakost u Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti, tj. ako i samo je $h_a=\lambda a, h_b=\lambda b, h_c=\lambda c$ za neki $\lambda>0$. No tada

$$P=\frac{1}{2}\lambda a^2=\frac{1}{2}\lambda b^2=\frac{1}{2}\lambda c^2,$$

odnosno $a=b=c$. Obrat očito vrijedi (tj. za $a=b=c$ se lako vidi da se postiže jednakost) pa zaključujemo da jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Drugo rješenje zadatka 15. Nejednakost možemo dokazati i koristeći nejednakosti među sredinama. Naime, u svakom trokutu vrijedi jednakost

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r},$$

pa zadana nejednakost slijedi primjenom AH nejednakosti na h_a,h_b,h_c.
Jednakost vrijedi kada se postiže jednakost u AH nejednakosti, a to je ako i samo ako $h_a=h_b=h_c$, odnosno $a=b=c$.