MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Potencija točke, radikalna os

27.3.2016.

Uvodni zadatci

Zadatak 1.
Dana je točka T i kružnica k. Kroz T su povučena dva pravca koji sijeku danu kružnicu u A i B, odnosno C i D. Dokažite da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

Rješenje.
Neka su točke A, B, C i D vrhovi četverokuta tim redom. Trokuti TAD i TCB imaju zajednički kut pri T te su kutevi $\sphericalangle TAD$ i $\sphericalangle TCB$ jednaki jer je četverokut tetivan. Naime, $\sphericalangle TAD = 180° - \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$. Sada slijedi da su ta dva trokuta slična pa imamo $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$, iz čega dobivamo $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

Zadatak 2.
(**Poučak o kutu tangente i tetive**) Vrhom C trokuta ABC povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je T proizvoljna točka na toj tangenti tako da se točke A i T nalaze na različitim stranama pravca BC. Dokažite $\sphericalangle TCB = \sphericalangle CAB$.

Rješenje.
Promatramo situaciju kada je trokut ABC šiljastokutan, a ostale se situacije dokazuju slično.

Neka je O središte opisane kružnice danog trokuta. O se nalazi unutar trokuta jer je on šiljastokutan. $\sphericalangle OCT = 90°$ i $\sphericalangle OCB = 90° - \sphericalangle CAB$ (uočimo $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC = \frac{180° - 2\sphericalangle CAB}{2}$ jer je $\sphericalangle CAB$ prikladni obodni kut središnjeg kuta $\sphericalangle COB$), pa dobivamo $\sphericalangle TCB = \sphericalangle CAB$.

Zadatak 3.
Vrhom C trokuta ABC povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je T presjek pravca AB i te tangente. Dokažite $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$.

Rješenje.
Iz prethodnog zadatka slijedi $\sphericalangle TCB = \sphericalangle BAC = \sphericalangle TAC$ te još vrijedi $\sphericalangle BTC = \sphericalangle CTB = \sphericalangle CTA$. Sada dobivamo $TCB \sim TAC$ pa slijedi $\frac{|TC|}{|TB|} = \frac{|TA|}{|TC|}$, odnosno $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$.

Umnošci iz 1. i 3. zadatka još se nazivaju i **potencija točke na kružnicu** (u ovom slučaju, potencija točke T na opisanu kružnicu trokuta ABC). Ako se u 3. zadatku AB uzme kao promjer lako se vidi da dani umnošci iznose $|OT|^2 - r^2$, gdje je r radijus dane kružnice. U 1. zadatku jednakost danih umnožaka ekvivalentna je tome da je $ABCD$ tetivan što ćemo dokazati u sljedećem zadatku.

Zadatak 4.
Dan je četverokut $ABCD$ i točka T na presjeku pravaca AB i CD tako da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$. Dokažite da je dani četverokut tetivan.

Rješenje.
Pretvorimo dani izraz u jednakost omjera $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$. Uz to još imamo $\sphericalangle ATD = \sphericalangle CTB$ pa po SKS poučku o sličnosti trokuta dobivamo $TAD \sim TCB$ te iz toga slijedi $180° - \sphericalangle BAD = \sphericalangle TAD = \sphericalangle BCT = \sphericalangle BCD$, pa je dani četverokut tetivan.

Radikalna os

U nastavku ovog predavanja koristit ćemo pojam **geometrijskog mjesta točaka**. Pod pojmom geometrijskog mjesta točaka podrazumijevamo neki skup točaka (u ovom predavanju, u ravnini) koji zadovoljava neki zadani uvjet. Najčešće će geometrijsko mjesto točaka biti neki poznati geometrijski objekt (krivulja, geometrijski lik, ...). Na primjer, ako u ravnini zadamo neke dvije točke, A i B, geometrijsko mjesto svih točaka koje su jednako udaljene od točaka A i B jest pravac (simetrala dužine $\overline{AB}$), dok je geometrijsko mjesto svih točaka T takvih da je kut $\sphericalangle ATB$ pravi kružnica promjera $\overline{AB}$ (bez točaka A i B).

Pokazat ćemo da je geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na dvije kružnice pravac pa ćemo stoga taj pravac nazvati **radikalna os**. Iz formule $|OT|^2 - r^2$ vidimo da postoji više točaka koje imaju međusobno jednake potencije na jednu kružnicu, a to su sve točke na kružnici koncentričnoj s promatranom. Šta se događa kada je $|OT| < r$? Za te slučajeve uzet ćemo da je potencija negativna (u skladu s prethodnom formulom). U suprotnom, kada bismo za iznos potencije uzimali umnožak iz 1. zadatka, neke bi točke izvan kružnice imale jednaku potenciju na tu kružnicu kao i neke točke unutar.

Zadatak 5.
Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku u točkama A i B. Dokažite da je pravac AB geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice.

Slijedi jedan zadatak u kojemu možemo vidjeti kako se koristi potencija točke iz prethodnog zadatka.

Zadatak 6.
Dane su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u K i L te zajednička tangenta na te dvije kružnice koja ih dira u točkama A i B, tim redom. Neka je M točka na presjeku pravaca AB i KL. Dokažite da je $|AM| = |BM|$.

Vidjeli smo da radikalna os postoji i da se lako konstruira za kružnice koje se sijeku, no što s onima koje se ne sijeku? Postoji li njihova radikalna os i kako ju naći i konstruirati? Pokušajmo odgovoriti na to pitanje sljedećim zadatkom.

Zadatak 7.
Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice. Dokažite da je geometrijsko mjesto točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice pravac okomit na spojnicu središta tih kružnica.

Primijetimo da smo u 1. zadatku dokazali koje je traženo geometrijsko mjesto ako se dane kružnice sijeku. U tom slučaju samo preostaje pokazati da je taj pravac stvarno okomit na spojnicu središta. No što sa slučajem kada se ne sijeku? Rješenje ovog problema moći ćete naći na našem YouTube kanalu, a sada slijedi samo mali hint tako da: SPOILER ALERT!!!. Hint: Pokušajmo prvo naći barem jednu točku koja ima jednaku potenciju na obje kružnice, a onda, budući da želimo pokazati da je naš traženi skup točaka pravac okomit na spojnicu središta, konstruirajmo pravac okomit na tu spojnicu koji prolazi nađenom točkom te za njega dokažimo da je skup svih točaka s traženim svojstvom. SPOILER END!!!

Zadatci i rješenja

Zadatak 8.
Kružnice k_1 i k_2, radijusa r_1 i r_2, dodiruju se izvana u točki A. Na kružnici k_1 odabrana je točka B i $|AB| = a$. Neka je T dirالište kružnice k_2 i tangente na tu kružnicu povučene iz točke B. Izrazite $|BT|$ pomoću r_1, r_2 i a.

Rješenje.
Hint: izrazite potenciju točke B na kružnicu k_2 na dva načina, koristeći tangentu BT i pravac AB (za koji pretpostavite da siječe kružnicu k_2 drugi put u točki C).

Zadatak 9.
Dana je kružnica promjera $\overline{AB}$ i proizvoljne točke D i C na luku $\widehat{\mathrm{AB}}$. E je točka na presjeku pravaca AD i BC. Dokažite da vrijednost izraza $|AE| \cdot |AD| + |BE| \cdot |BC|$ ne ovisi o izboru točaka D i C.

Rješenje.
Hint: označite sa P polovište dužine $\overline{AB}$, a sa N nožište okomice iz točke E na tu dužnu. Preuredite izraz dan u tvrdnji zadatka tako da dobijete izraz za potenciju točke E na polukružnicu promjera $\overline{AB}$, a zatim primijenite Pitagorin poučak i izraze za potenciju točke N na danu polukružnicu.

Zadatak 10.
Dane su tri kružnice k_1, k_2 i k_3 te pravci s_1, s_2 i s_3 koji su redom radikalne osi parova kružnica (k_1, k_2), (k_3, k_2) i (k_1, k_3). Dokažite da su s_1, s_2 i s_3 paralelni pravci ako su središta danih kružnica kolinearna, a u suprotnom prolaze istom točkom. Ta točka zove se **radikalno središte**.

Rješenje.
Hint: ako su središta svih triju kružnica kolinearna, onda su radikalne osi paralelne jer su to pravci koji su okomiti na pravac na kojemu ta središta leže. Pretpostavimo da središta nisu kolinearna. Tada se radikalne osi parova kružnica (k_1, k_2) i (k_2, k_3) moraju sjeći u nekoj točki T. No, tada točka T ima jednaku potenciju na sve tri kružnice k_1, k_2, k_3 pa specijalno mora ležati i na radikalnoj osi para (k_3, k_1).

Zadatak 11.
Dvije kružnice, k_1 i k_2, sijeku se u točkama S i T. Neka je P točka na pravcu ST. Na k_1 odabrane su točke A i B, a na k_2 odabrane su C i D takve da su A, B i P te C, D i P kolinearne. Dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivan.

Rješenje.
Hint: pokažite da su trokuti PAC i PDB slični.

Zadatak 12.
Dan je trokut ABC i točka T na pravcu AB takva da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$. Dokažite da je pravac TC tangenta na kružnicu opisanu trokutu ABC.

Zadatak 13.
Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $\sphericalangle ABC > 90°$, odnosno $|AC| > |BD|$. Opisana kružnica trokuta BCD siječe dijagonalu $\overline{AC}$ po drugi put u točki M. Dokažite da je pravac BD zajednička tangenta na kružnice opisane trokutima ABM i ADM.

Rješenje.
Hint: iskoristite prethodni zadatak.

Zadatak 14.
Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su redom točke D, E i F takve da je četverokut $BCEF$ tetivan. Neka je T drugo sjecište kružnica opisanih trokutima BDF i CDE. Dokažite da su točke A, D i T kolinearne.

Zadatak 15.
Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su redom točke E i F takve da su pravci EF i BC paralelni. Dokažite da se kružnice kojima su $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ promjeri sijeku na pravcu koji prolazi vrhom A, a okomit je na stranicu $\overline{BC}$ trokuta.

Rješenje.
Hint: odredite potencije vrha A i ortocentra H trokuta ABC na te dvije kružnice.

Teži zadatci

Zadatak 16.
Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se ne sijeku. Dokažite da je geometrijsko mjesto središta kružnica koje su ortogonalne na njih njihova radikalna os.
Napomena: dvije su kružnice ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.

Zadatak 17.
Neka su A, B, C i D kolinearne točke tim redoslijedom. Kružnice promjera $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točkama X i Y. Neka je P točka na pravcu $\overline{XY}$ koja se ne nalazi na pravcu AB te neka su M i N drugi presjeci pravaca CP i BP s kružnicama nad $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, tim redom. Dokažite da se pravci AM, DN i XY sijeku u jednoj točki.

Zadatak 18.
Neka je ABC šiljastokutan trokut s ortocentrom H i D točka na stranici $\overline{BC}$. Neka su E i F redom nožišta visina iz vrhova B i C. Neka je k_1 kružnica opisana trokutu BDF i točka X takva da je $\overline{DX}$ promjer kružnice k_1. Analogno su definirane kružnice k_2 i Y. Dokažite da su točke X, Y i H kolinearne.

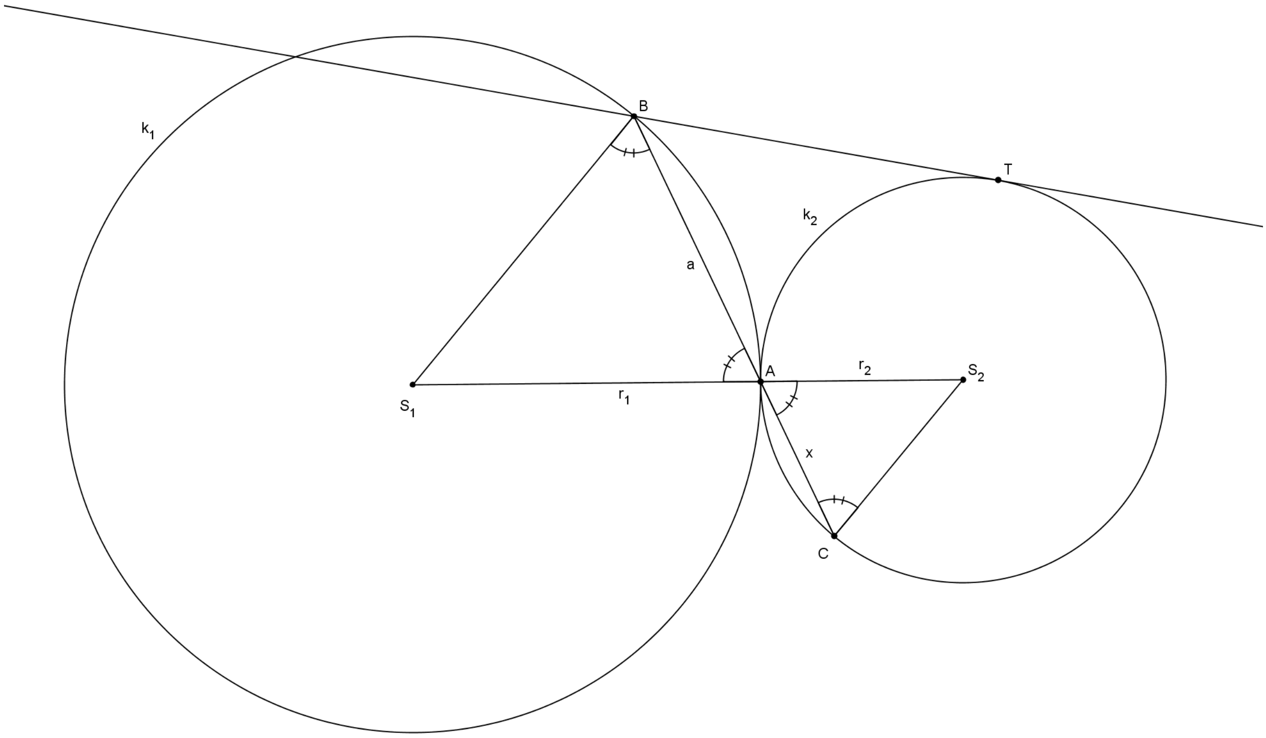
Rješenja nekih zadataka

Rješenje zadatka 5. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 6. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 7. Pogledajte ga ovdje i ovdje.

Rješenje zadatka 8.



Neka su S_1 i S_2 redom središta kružnica k_1 i k_2 te neka pravac AB siječe kružnicu k_2 po drugi put u točki C. Označimo $|AC| = x$. Iz jednakosti potencija točke B na kružnicu k_2 slijedi

$$|BT|^2 = |BA| \cdot |BC| \Rightarrow |BT|^2 = a(a+x).$$

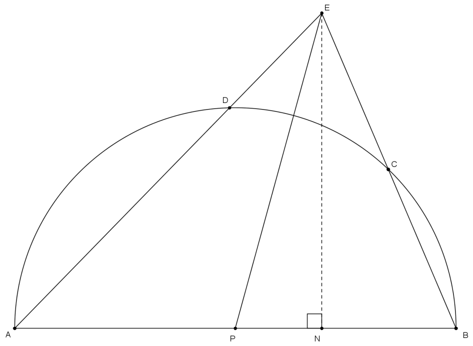
Budući da se kružnice k_1 i k_2 dodiruju u točki A, točke S_1, A i S_2 su kolinearne. Zato slijedi $\sphericalangle BAS_1 = \sphericalangle CAS_2$ (to su vršni kutovi), a odavde dobivamo da su trokuti BS_1A i CS_2A slični (to su jednakokračni trokuti s jednakim kutovima uz osnovicu). Sada imamo

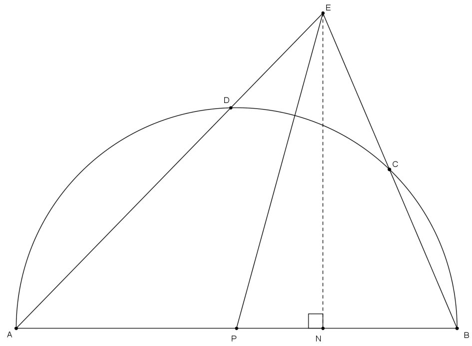
$$\frac{|BA|}{|S_1A|} = \frac{|CA|}{|S_2A|} \Rightarrow \frac{a}{r_1} = \frac{x}{r_2} \Rightarrow x = \frac{ar_2}{r_1}.$$

Konačno,

$$|BT| = \sqrt{a\left(a + \frac{ar_2}{r_1}\right)} = a\sqrt{1 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Rješenje zadatka 9.





Možemo razlikovati dva slučaja u ovisnosti o tome nalazi li se točka E unutar ili izvan dane polukružnice (kao što je prikazano na gornjim slikama).
Pretpostavimo da se točka E nalazi izvan polukružnice. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$ te neka je N nožište okomice iz točke N na dužinu $\overline{AB}$. Označimo $d = |AE| \cdot |AD| + |BE| \cdot |BC|$. Vrijedi

$$\begin{aligned} d &= |AE| \cdot (|AE| - |DE|) + |BE| \cdot (|BE| - |EC|) \\ &= |AE|^2 - |AE| \cdot |DE| + |BE|^2 - |BE| \cdot |EC|. \end{aligned}$$

No, znamo da je $-|AE| \cdot |DE| = -|BE| \cdot |EC|$ jer su oba ta izraza jednaka potenciji točke E na kružnicu promjera $\overline{AB}$ (dakle, jednaki su $r^2 - |EP|^2$, gdje je r duljina polumjera te kružnice). Sada (višestrukom) primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$\begin{aligned} d &= |AN|^2 + |EN|^2 + |BN|^2 + |EN|^2 + 2(r^2 - |EP|^2) \\ &= |AN|^2 + |BN|^2 + 2(|EN|^2 - |EP|^2) + 2r^2 \\ &= |AN|^2 + |BN|^2 - 2|PN|^2 + 2r^2 \\ &= |AN|^2 + |BN|^2 + 2(r^2 - |PN|^2). \end{aligned}$$

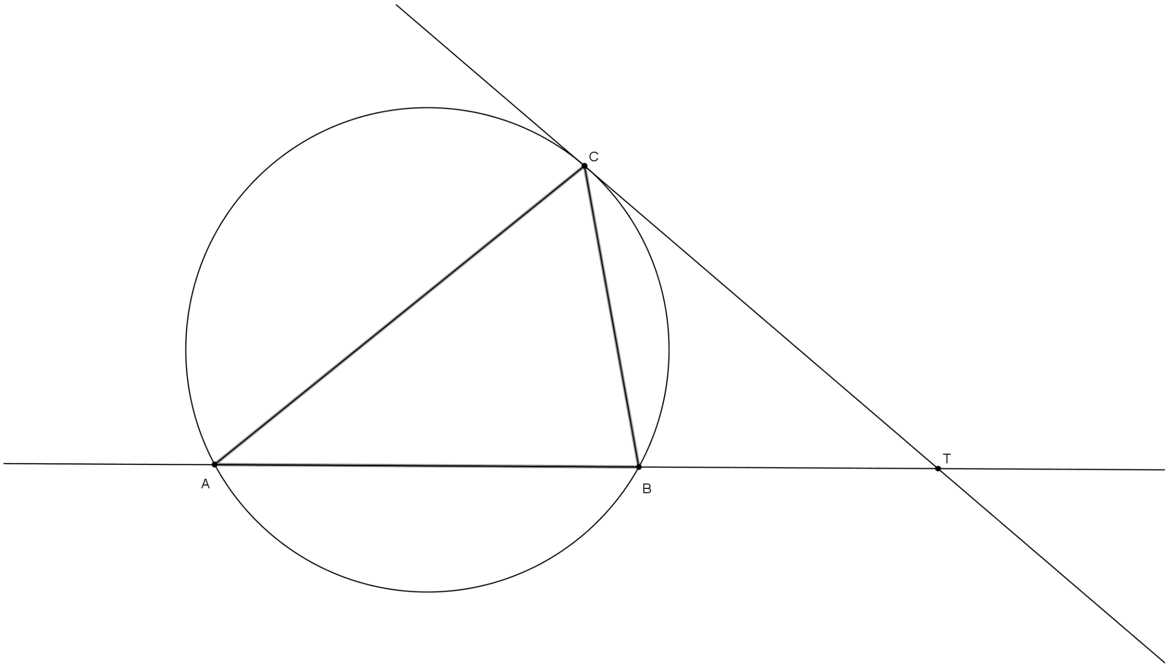
No, izraz koji smo dobili u zagradi jednak je potenciji točke N na kružnicu promjera $|AB|$. Zato slijedi

$$d = |AN|^2 + |BN|^2 - 2|AN| \cdot |BN| = (|AN| + |BN|)^2 = |AB|^2,$$

što je vrijednost koja ne ovisi o izboru točaka C i D.
Drugi slučaj (kada se E nalazi unutar polukružnice) dokazuje se potpuno analogno i ostavljamo ga vama za vježbu.

Rješenje zadatka 11. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 12.

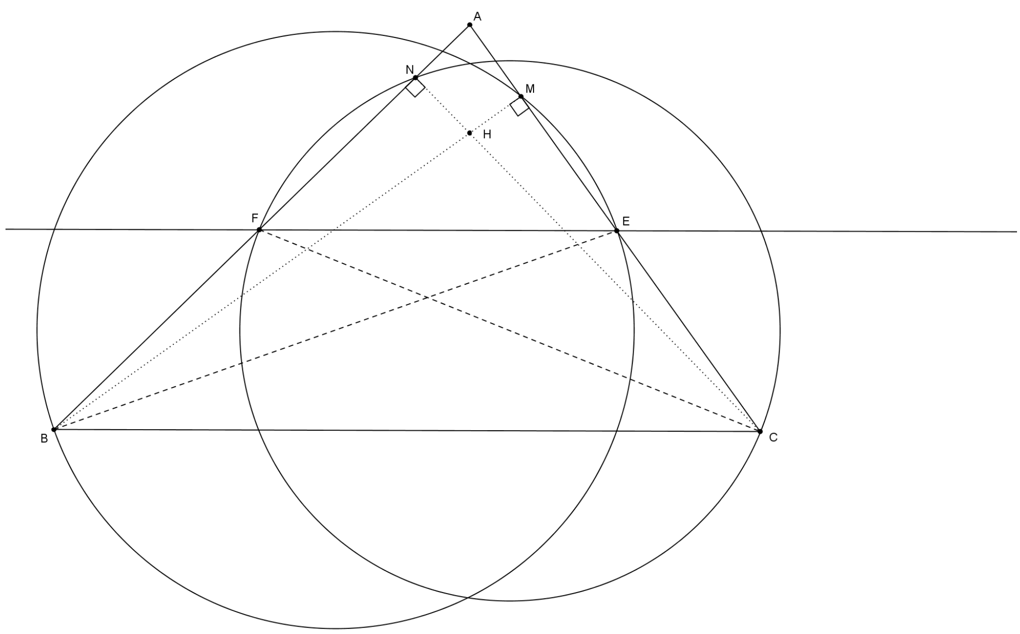


Pretpostavimo da pravac TC opisanu kružnicu trokuta ABC siječe još u točki D. Tada vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ (jer su oba ova izraza jednaka potenciji točke C na opisanu kružnicu trokuta ABC ili suprotnoj vrijednosti te potencije). No, budući da je prema pretpostavci zadatka $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$, slijedi $|TC| = |TD|$, a kako se točke C i D na pravcu TC nalaze s iste strane točke T, one se podudaraju. Dakle, pravac TC je uistinu tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC.

Rješenje zadatka 13. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 14. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 15.



Kružnica promjera $\overline{BE}$ prema Talesovom poučku prolazi nožištem okomice iz točke B na stranicu $\overline{CA}$. Označimo tu točku sa M. Analogno, kružnica promjera $\overline{CF}$ prolazi nožištem N okomice iz točke C na stranicu $\overline{AB}$. Znamo da se dužine $\overline{BM}$ i $\overline{CN}$ sijeku u ortocentru H trokuta.
No, vrijedi

$$|BH| \cdot |HM| = |CH| \cdot |HN|.$$

Ova se činjenica može pokazati koristeći sličnost trokuta i ostavljamo je vama za vježbu. To znači da točka H ima jednake potencije na obje kružnice pa se nalazi na njihovoj radikalnoj osi, tj. pravcu koji prolazi kroz sjecišta tih kružnica.
Nadalje, iz sličnosti trokuta AMN i ABC slijedi

$$|AN| : |AM| = |AC| : |AB|.$$

No, zbog paralelnosti pravaca EF i BC slijedi

$$|AC| : |AB| = |AE| : |AF|$$

Dakle,

$$|AN| : |AM| = |AE| : |AF| \Rightarrow |AN| \cdot |AF| = |AM| \cdot |AE|.$$

Odavde slijedi da točka A ima jednake potencije na obje kružnice pa ona također leži na radikalnoj osi tih kružnica.
Dakle, vidimo da radikalna os tih dviju kružnica prolazi točkama A i H što je očito pravac kroz točku A okomit na stranicu $\overline{BC}$.

Rješenje zadatka 16. Pogledajte ga ovdje i ovdje.

Rješenje zadatka 17. Pogledajte ga na linku.

Rješenje zadatka 18. Pogledajte ga na linku.