MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Ponavljanje

9.10.2016.

Novu sezonu online predavanja otvorit ćemo zadatcima za ponavljanje. Iz svakog smo područja odabrali po nekoliko zadataka koji se nadovezuju na prošlogodišnja predavanja - pogledajte ih i pokušajte riješiti ove zadatke. Rješenja zadataka objavit ćemo idući tjedan. Sretno s rješavanjem!

Zadatci iz algebre

Zadatak 1.
Ako je $xyz \neq 0$ te

$$a = x + \frac{1}{x}, \quad b = y + \frac{1}{y}, \quad c = xy + \frac{1}{xy},$$

odredite relaciju koja povezuje brojeve a, b, c.

Zadatak 2.
Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x + y = 12 \end{cases}.$$

Zadatak 3.
Dokažite da za sve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geqslant (1+abcd)^4.$$

Rješenje.
Uputa: najprije dokažite da za realne brojeve a, b vrijedi nejednakost

$$(1+a^2)(1+b^2) \geqslant (1+ab)^2.$$

Koristite nejednakosti među sredinama.

Zadatci iz kombinatorike

Zadatak 4.
Na ploči su napisani brojevi $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2015}, \frac{1}{2016}$.

(a) U svakom koraku izbrišemo dva broja, a i b, i umjesto njih napišemo ab. Koji će broj ostati posljednji na ploči?

(b) U svakom koraku izbrišemo dva broja, a i b, i umjesto njih napišemo $a+b+ab$. Koji će broj ostati posljednji na ploči?

Rješenje.
Uputa: prisjetite se predavanja o invarijantama.

Zadatak 5.
Neka je zadan $n \in \mathbb{N}$. Iz pravokutne ploče $2^n \times 2^n$ uklonimo jedno 1×1 polje. Dokažite da se takva ploča može pokriti pločama dimenzija 2×2 kojima smo uklonili jedno 1×1 polje.

Rješenje.
Uputa: matematička indukcija po n.

Zadatak 6.
Na nekom šahovskom turniru sudjeluje 8 šahista. Svaki od njih igra sa svakim od preostalih 7 šahista jednu partiju šaha. dokažite da u svakom trenutku postoje barem dva šahista koji su odigrali jednak broj partija šaha.

Rješenje.
Uputa: razlikujte dva slučaja - postoji igrač koji je odigrao svih 7 partija šaha i ne postoji takav igrač. Koristite Dirichletov princip.

Zadatci iz geometrije

Zadatak 7.
Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Ako je P polovište dužine $\overline{CA}$, dokažite $|DM| = 2|BP|$.

Zadatak 8.
Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrale kutova $\angle ABC$ i $\angle CDA$ sijeku opisanu kružnicu tog četverokuta u točkama E i F, tim redom. Dokažite da je $\overline{EF}$ promjer opisane kružnice tog četverokuta.

Zadatak 9.
Neka je k kružnica sa središtem u točki O i neka je točka T izvan kružnice k. Neka je S sjecište kružnice k i dužine $\overline{OT}$. U točki S povučena je tangenta t na k i oko O je opisana kružnica k_1 kroz točku T koja siječe pravac t u točkama P i Q. Dokažite da su sjecišta dužina $\overline{OP}$ i $\overline{OQ}$ sa k dirališta tangenti povučenih iz T na k.

Zadatci iz teorije brojeva

Zadatak 10.
Dokažite da broj $2^{50} + 1$ nije djeljiv brojem $2^7 - 1$.

Zadatak 11.
Nađite sve prirodne brojeve a, b koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p},$$

pri čemu je p prost broj.

Zadatak 12.
Ima li jednadžba

$$x^5 + y^5 + z^5 = 2017$$

rješenja u skupu $\mathbb{Z}$?

Rješenje.
Uputa: promatrajte ostatke pri dijeljenju lijeve i desne strane jednadžbe pri dijeljenju s 11. Koristitite mali Fermatov teorem.