Ponavljanje - rješenja

16.10.2016.

Zadatci iz algebre

Zadatak 1.
Ako je $xyz \neq 0$ te
$$a = x + \frac{1}{x}, \quad b = y + \frac{1}{y}, \quad c = xy + \frac{1}{xy},$$
odredite relaciju koja povezuje brojeve a, b, c.

Rješenje.
Imamo
$$ab = xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = c + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right),$$
tj.
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = ab - c. \tag{1}$$
Nadalje, kvadriranjem relacija koje definiraju a, b i c dobivamo
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2, \quad y^2 + \frac{1}{y^2} = b^2 - 2, \quad (xy)^2 + \frac{1}{(x)y^2} = c^2 - 2. \tag{2}$$
Iz relacija (2) dobivamo
$$\begin{aligned} c^2 - 2 &= (xy)^2 + \frac{1}{(x)y^2} \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) \\ &\overset{(2)}{=} (a^2 - 2)(b^2 - 2) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right), \end{aligned}$$
odakle slijedi
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = (a^2 - 2)(b^2 - 2) - (c^2 - 2). \tag{3}$$
S druge strane, iz (1) slijedi
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = (ab - c)^2 - 2. \tag{4}$$
Sada relacije (3) i (4) daju
$$(ab - c)^2 - 2 = (a^2 - 2)(b^2 - 2) - (c^2 - 2),$$
odakle sređivanjem slijedi
$$a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4.$$

Zadatak 2.
Riješite sustav jednadžbi
$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x + y = 12 \end{cases}.$$

Rješenje.
Primjenom AG nejednakosti imamo:

$$\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}\cdot\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}}=2,$$

a budući da prema prvoj jednadžbi vrijedi jednakost,, mora biti i

$$\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}=\sqrt{\frac{y+2}{2x-1}}=1$$
$$\Rightarrow \frac{2x-1}{y+2}=1$$
$$\Rightarrow 2x-1=y+2.$$

Rješavanjem sustava

$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=12 \end{cases}$$

dobivamo rješenje $(x,y)=(5,7)$, a provjerom vidimo kako dobiveno rješenje zadovoljava početni sustav.

Zadatak 3.
Dokažite da za sve $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)\geqslant(1+abcd)^4.$$

Rješenje.
Za $a,b\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$(1+a^2)(1+b^2)=1+a^2+b^2+(ab)^2 \overset{AG}{\geqslant} 1+2|ab|+(ab)^2\geqslant 1+2ab+(ab)^2=(1+ab)^2.$$

Primjenom ove nejednakosti dobijemo

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)\geqslant(1+a^2b^2)^2(1+c^2d^2)^2\geqslant\left[(1+abcd)^2\right]^2=(1+abcd)^4.$$

Zadatci iz kombinatorike

Zadatak 4.
Na ploči su napisani brojevi $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{2015},\frac{1}{2016}$.

(a) U svakom koraku izbrišemo dva broja, a i b, i umjesto njih napišemo ab. Koji će broj ostati posljednji na ploči?

(b) U svakom koraku izbrišemo dva broja, a i b, i umjesto njih napišemo $a+b+ab$. Koji će broj ostati posljednji na ploči?

Rješenje.

(a) Uočimo da nakon svakog koraka umnožak svih brojeva na ploči ostaje isti (tj. umnožak brojeva na ploči je tražena invarijanta). Dakle, kada na ploči ostane samo jedan broj, to će biti upravo umnožak svih brojeva na ploči, tj.

$$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2015}\cdot\frac{1}{2016}=\frac{1}{2016!}.$$

(b) Uočimo da vrijedi

$$a+b+ab+1=(a+1)(b+1).$$

Zato vidimo da će u ovom slučaju nakon svakog koraka umnožak brojeva na ploči uvećanih za 1 ostati isti. Zato će posljednji broj na ploči biti

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2015}\right)\left(1+\frac{1}{2016}\right)=\frac{2017!}{2016!}=2017.$$

Zadatak 5.
Neka je zadan $n \in \mathbb{N}$. Iz pravokutne ploče $2^n \times 2^n$ uklonimo jedno 1×1 polje. Dokažite da se takva ploča može pokriti pločama dimenzija 2×2 kojima smo uklonili jedno 1×1 polje.

Rješenje.
Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i pokažimo tvrdnju za $n + 1$. Ploču dimenzija $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ kojoj je uklonjeno jedno polje možemo dobiti spajanjem četiri krnjih ploča dimenzija $2^n \times 2^n$ i dodavanjem jedne 2×2 ploče s jednim poljem manje. Budući da za svaku od tih četiri ploča vrijedi tvrdnja prema induktivnoj pretpostavci, i krnju $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ ploču možemo popločati na zadani način.

Zadatak 6.
Na nekom šahovskom turniru sudjeluje 8 šahista. Svaki od njih igra sa svakim od preostalih 7 šahista jednu partiju šaha. dokažite da u svakom trenutku postoje barem dva šahista koji su odigrali jednak broj partija šaha.

Rješenje.
Ako postoji šahist koji je već odigrao svih 7 partija šaha, tada ne postoji šahist koji nije odigrao niti jednu partiju šaha. Broj odgiranih partija šaha za proizvoljno odabranog šahista tada može biti 1, 2, 3, 4, 5, 6 ili 7, tj. ukupno imamo 7 mogućnosti. Budući da je 8 šahista, prema Dirichletovom principu postoje dva šahista koji su odigrali jednak broj partija šaha.

Ako postoji šahist koji nije odigrao niti jednu partiju šaha, tada ne postoji niti šahist koji je odigrao svih 7 partija šaha. Sada je proizvoljno odabrani šahist mogao odigrati 0, 1, 2, 3, 4, 5 ili 6 partija pa prema Dirichletovom principu ponovno zaključujemo da postoje dva šahista koji su odigrali jednak broj partija šaha.

Zadatci iz geometrije

Zadatak 7.
Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Ako je P polovište dužine $\overline{CA}$, dokažite $|DM| = 2|BP|$.

Rješenje.
Neka je T centralnosimetrična slika točke B s obzirom na točku P. Označimo $\beta = \angle ABC$. Budući da je četverokut $ATCB$ paralelogram (jer mu se dijagonale raspolavljaju), slijedi $\angle BAT = 180^\circ - \beta$. S druge strane,

$$\angle DBM = 360^\circ - \beta - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ - \beta = \angle BAT.$$

Nadalje,

$$|AB| = |BD|, \quad |AT| = |BC| = |BM|,$$

jer su četverokuti $ABDE$ i $BCKM$ kvadrati. Sada po SKS poučku o sukladnosti slijedi $BAT \cong DBM$, a odavde dobivamo

$$|DM| = |BT| = 2|BP|.$$

Zadatak 8.
Zadan je tetivni četverokut $ABCD$. Simetrale kutova $\angle ABC$ i $\angle CDA$ sijeku opisanu kružnicu tog četverokuta u točkama E i F, tim redom. Dokažite da je $\overline{EF}$ promjer opisane kružnice tog četverokuta.

Rješenje.
Označimo $\beta = \angle ABC$, $\delta = \angle CDA$. Budući da je četverokut $ABCD$ tetivan, vrijedi $\beta + \delta = 180^\circ$. Nadalje,

$$\angle FBE = \angle FBA + \angle ABD = \angle FBA + \frac{1}{2}\beta.$$

S druge strane, vrijedi

$$\angle FBA = \angle FDA = \frac{1}{2}\delta$$

jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AF}$. Slijedi

$$\angle FBE = \frac{1}{2}(\beta + \delta) = 90^\circ$$

pa prema obratu Talesovog poučka slijedi da je $\overline{EF}$ promjer opisane kružnice četverokuta $ABCD$.

Zadatak 9.
Neka je k kružnica sa središtem u točki O i neka je točka T izvan kružnice k. Neka je S sjecište kružnice k i dužine $\overline{OT}$. U točki S povučena je tangenta t na k i oko O je opisana kružnica k_1 kroz točku T koja siječe pravac t u točkama P i Q. Dokažite da su sjecišta dužina $\overline{OP}$ i $\overline{OQ}$ sa k dirališta tangenti povučenih iz T na k.

Rješenje.
Neka su P_1 i Q_1 redom sjecišta dužina $\overline{OP}$ i $\overline{OQ}$ sa k. Uočimo da vrijedi

$$|OT| = |OP|, \quad |OP_1| = |OS|, \quad \angle TOP_1 = \angle POS,$$

pa prema SKS poučku o sukladnosti slijedi $P_1OT \cong SOP$. No budući da je t tangenta na k s diralištem u S, slijedi $\angle OSP = 90°$ pa upravo dokazana sukladnost povlači $\angle OP_1T = 90°$. Dakle, TP_1 je tangeta na k s diralištem u P_1. Analogno se pokazuje i tvrdnja za Q_1.

Zadatci iz teorije brojeva

Zadatak 10.
Dokažite da broj $2^{50} + 1$ nije djeljiv brojem $2^7 - 1$.

Rješenje.
Budući da je $2^7 \equiv 1 \pmod{2^7 - 1}$, to je

$$2^{49} \equiv (2^7)^7 \equiv 1 \pmod{2^7 - 1},$$

pa imamo $2^{50} \equiv 2 \pmod{2})^7 - 1$. Dakle, $2^{50} + 1 \equiv 3 \not\equiv 0 \pmod{2^7 - 1}$.

Zadatak 11.
Nađite sve prirodne brojeve a, b koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p},$$

pri čemu je p prost broj.

Rješenje.
Najprije uočimo da oba broja a i b moraju biti strogo veća od p. Množenjem zadane jednadžbe sa pab dobivamo

$$\begin{aligned} pa + pb = ab &\Leftrightarrow pa - ab + pb = 0 \\ &\Leftrightarrow a(p - b) + pb - p^2 = -p^2 \\ &\Leftrightarrow (a - p)(p - b) = -p^2 \\ &\Leftrightarrow (a - p)(b - p) = p^2. \end{aligned}$$

Na lijevoj strani dobivene jednadžbe imamo umnožak dva prirodna broja. Broj p^2 možemo faktorizirati na sljedeće načine

$$p^2 = 1 \cdot p^2 = p \cdot p,$$

pa vidimo da imamo sljedeće tri mogućnosti

(1) $a - p = 1$, $b - p = p^2$,
(2) $a - p = b - p = p$,
(3) $a - p = p^2$, $a - p = 1$,

odakle dobivamo da su sva rješenja zadane jednadžbe u skupu $\mathbb{N}$

$$(a, b) \in \{(p + 1, p + p^2), (2p, 2p), (p + p^2, p + 1)\}.$$

Zadatak 12.
Ima li jednadžba

$$x^5 + y^5 + z^5 = 2017$$

rješenja u skupu $\mathbb{Z}$?

Rješenje.
Prema malom Fermatovom teoremu, za cijeli broj x koji nije djeljiv s 11 vrijedi $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, tj. $(x^5 - 1)(x^5 + 1) \equiv 0 \pmod{11}$. Dakle, ukoliko $11 \nmid x$, vrijedi $x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$ pa su svi mogući ostatci pri dijeljenju pete potencije cijelog broja s 11 jednaki 0, 1 ili -1. Zato su svi mogući ostatci pri dijeljenju lijeve strane zadane jednadžbe s 11 jednaki -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. Budući da je $2017 \equiv 4 \pmod{11}$, vidimo da zadana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.