Kružnica 9 točaka

16.10.2016.

Dosad ste se susreli s dvije vrste kružnica koje pridružujemo trokutu: opisanom i upisanom kružnicom (neki su možda čuli i za pojam pripisane kružnice koju ćemo u ovom predavanju također spomenuti). U ovom ćemo predavanju definirati još jednu posebnu kružnicu trokuta koja prolazi kroz 9 posebno odabranih točaka (odakle joj i naziv) te dokazati neka njena osnovna svojstva. Za početak uvedimo nekoliko standardnih oznaka - u trokutu ABC označimo

- P_A, P_B, P_C su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, tim redom,
- N_A, N_B, N_C su nožišta visina iz vrhova A, B, C na nasuprotne stranice trokuta, tim redom,
- (ABC) je opisana kružnica trokuta,
- O i I su središta opisane i upisane kružnice trokuta, tim redom,
- R i r su radijusi opisane i upisane kružnice trokuta, tim redom,
- G i H su težište i ortocentar trokuta, tim redom.

Ove ćemo oznake (bez pretjeranog naglašavanja) koristiti sve do kraja predavanja.

Sam pojam kružnice 9 točaka uvest ćemo kroz nekoliko zadataka. Započet ćemo s jednim jednostavnim (a korisnim) svojstvom ortocentra koji ćemo kasnije koristiti.

Zadatak 1.

(a) Dokažite da osnosimetrične slike točke H s obzirom na stranice trokuta ABC leže na kružnici (ABC).

(b) Dokažite da centralnosimetrične slike točke H s obzirom na točke P_A, P_B, P_C također leže na kružnici (ABC).

Zadatak 2.
Dokažite da je u trokutu ABC

$$P_B P_A P_C \cong P_C N_A P_B.$$

Posljedica 1. *U trokutu ABC točke P_A, P_B, P_C, N_A, N_B, N_C su konciklične (leže na istoj kružnici).*

Dokaz. Prema prethodnom zadatku imamo $\angle P_B N_A P_C = \angle P_B P_A P_C$ (u kružnici $(P_A P_B P_C)$ to su obodni kutovi nad tetivom $\overline{P_B P_C}$) pa slijedi da su točke N_A, P_A, P_B i P_C konciklične. Analogno se pokazuje i za preostale točke. □

Zasad smo našli kružnicu koja prolazi kroz 6 točaka trokuta. Za preostale 3 točke označimo

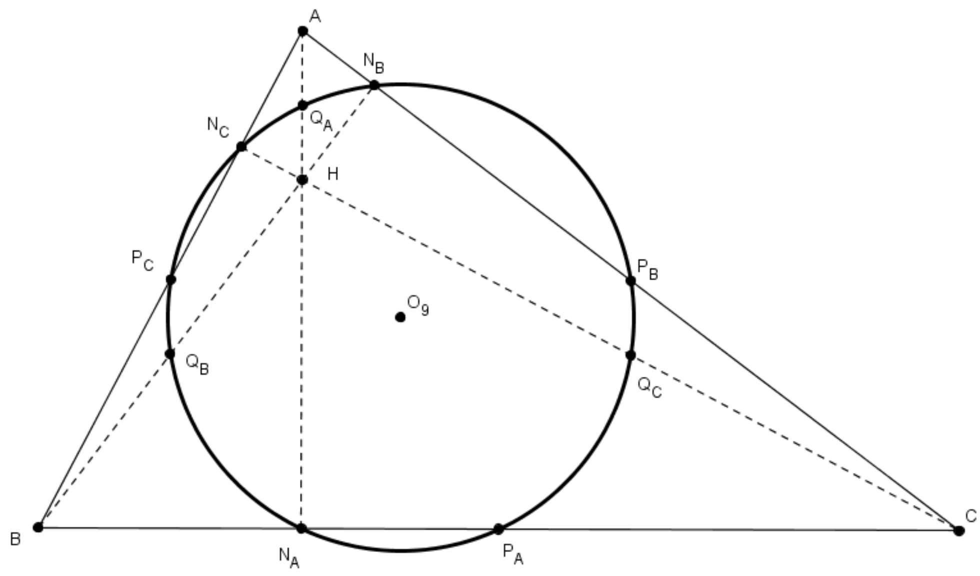
- Q_A, Q_B i Q_C su polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$, tim redom.

Zadatak 3.
Dokažite da je četverokut $N_A P_A P_B Q_A$ tetivan.

Iz ovih zadataka slijedi

Teorem 1. *U trokutu ABC točke P_A, P_B, P_C, N_A, N_B, N_C, Q_A, Q_B i Q_C leže na istoj kružnici.*

Definicija 1. *Kružnicu iz prethodnog teorema zovemo* ***kružnica 9 točaka*** *(ponekad se zove* ***Eulerova*** *ili* ***Feuerbachova kružnica****). Kružnicu 9 točaka označavamo k_9, a njeno središte označavamo O_9.*



Uočimo usput da iz zadatka 3 te obrata Talesovog teorema slijedi i

Posljedica 2. *O_9 je polovište dužine $\overline{Q_A P_A}$.*

Zadatak 4.
Dokažite da u trokutu ABC vrijedi

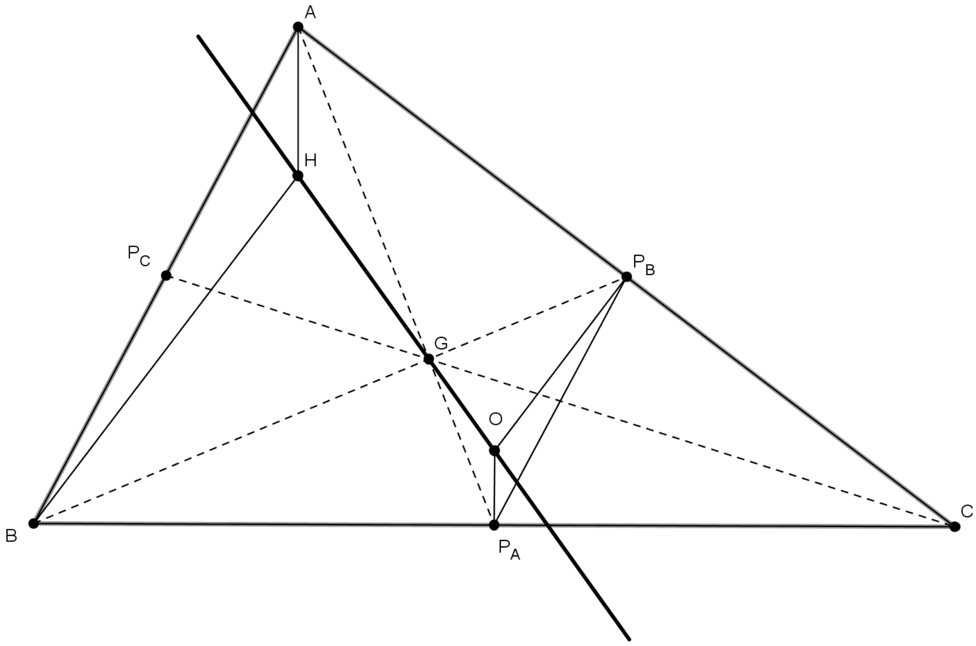
$$AH \parallel OP_A, \quad |AH| = 2|OP_A|.$$

Zadatak 5.
Dokažite da je O_9 polovište dužine $\overline{OH}$.

Napomena 1. *Vrijedi sljedeći rezultat.*

Teorem 2. *O, H i G su kolinearne točke.*

Dokaz.



Zbog

$$|OP_B| : |BH| = |P_AG| : |GA| = 1 : 2, \quad OP_B \parallel BH, \quad P_BG \equiv GB$$

po SKS poučku slijedi da su trokuti HBG i OP_BG slični. Odavde $\angle OGP_B = \angle HGB$ pa su O, G i H kolinearne. $\square$

*Pravac na kojemu leže točke O, G i H zovemo **Eulerov pravac** trokuta. Iz prethodnog zadatka vidimo da na tom pravcu leži i O_9.*

Zadatak 6.
Dokažite da za polumjer kružnice k_9, R_9, vrijedi

$$R_9 = \frac{R}{2}.$$

Zadatak 7.
Dokažite da je tangenta na kružnicu k_9 u točki P_A paralelna tangenti u točki A na kružnicu (ABC).

Zadatak 8.
Dokažite da kružnica k_9 raspolavlja svaku dužinu koja točku H spaja s (proizvoljno odabranom) točkom na kružnici (ABC).

Zadatak 9.
Zadan je trokut ABC takav da $|AB| \neq |AC|$.Neka su D, E i F redom dirališta upisane kružnice sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Neka su Y i Z redom sjecišta pravaca DF i DE s pravcem kroz točku A paralelnim s pravcem BC. Neka su točke E' i F' redom polovišta dužina $\overline{DZ}$ i $\overline{DY}$. Dokažite da točke A, E, E', F, F' i I leže na istoj kružnici.

Napomena 2. *Neka je T sjecište pravca ZF i upisane kružnice trokuta ABC. Zbog $\angle TFD = \angle ZFD = 90°$ prema obratu Talesovog poučka slijedi da je $\overline{DI}$ promjer upisane kružnice trokuta ABC. Zato (prema Talesovom poučku) imamo $\angle TED = \angle YED$ pa su točke Y, T i E kolinearne. Dakle, T je ortocentar trokuta DZY pa je I polovište dužine koja ortocentar trokuta spaja s njegovim vrhom, što daje drugi dokaz tvrdnje da I leži na kružnici (AEF).*

Zadatak 10.
Zadan je trokut ABC. Dokažite da se Eulerovi pravci trokuta ABH, BCH i CAH sijeku u jednoj točki.

Posljedica 3. *Opisane kružnice trokuta ABC, ABH, BCH i CAH su međusobno sukladne (imaju jednak polumjer).*

Definicija 2. *Ako su točke A_1, A_2, A_3, A_4 takve da je A_4 ortocentar trokuta $A_1A_2A_3$, kažemo da je $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$* ***ortocentrička četvorka****.*

Napomena 3. *Uočimo da je svaka točka ortocentričke četvorke ortocentar trokuta kojeg određuju preostale tri točke. Također uočimo da je zbog prethodnog zadatka dobro definiran pojam kružnice 9 točaka ortocentričke četvorke.*

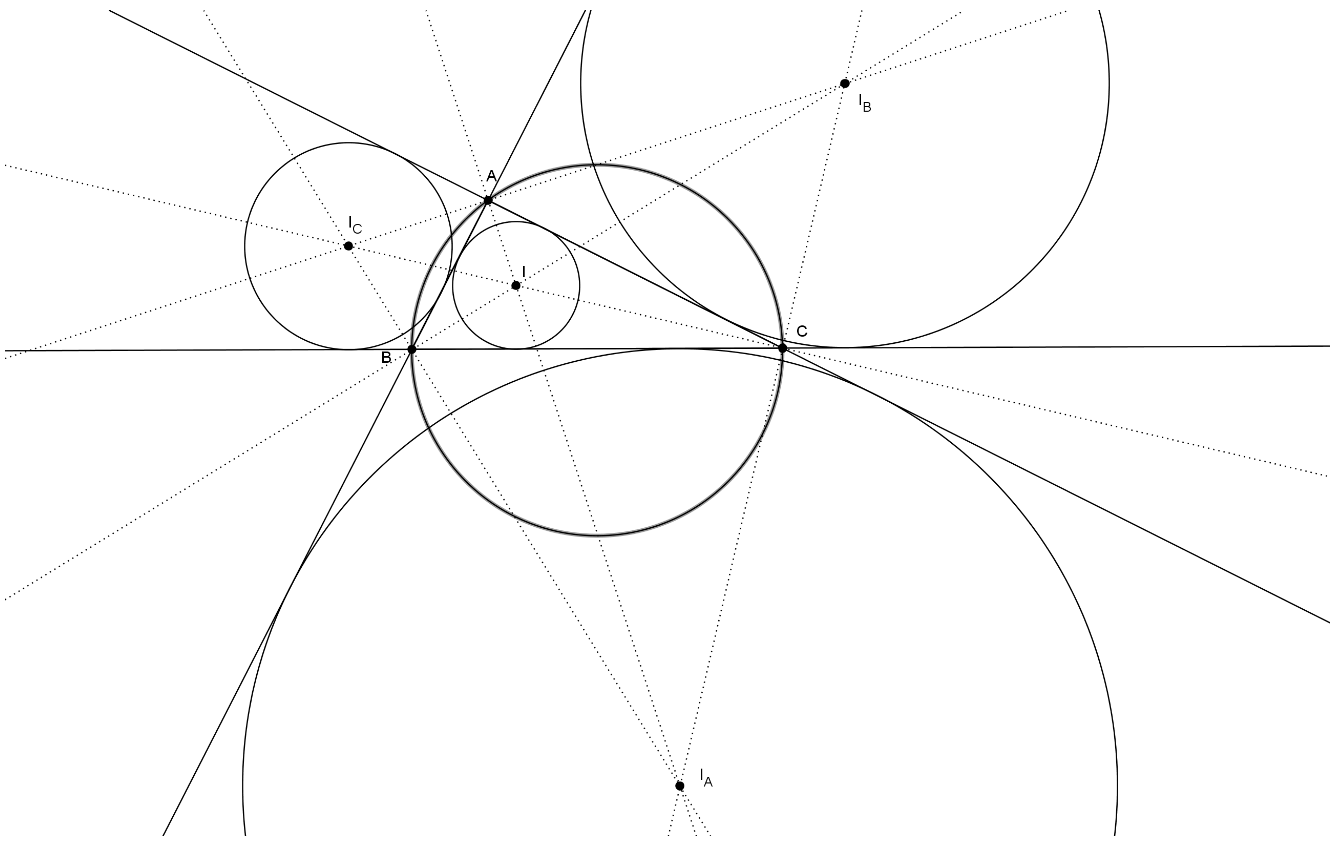
Zadatak 11.
Dokažite da središta opisanih kružnica četiri trokuta određena s po tri od četiri točke ortocentričke četvorke također čine ortocentričku četvorku te da se kružnice 9 točaka tih dviju ortocentričkih četvorki podudaraju.

Prisjetimo se sada još jedne vrste kružnica koja se definira za neki trokut.

Definicija 3. *Kružnica koja dira jednu stranicu trokuta s vanjske strane i produženja preostalih dviju stranica zovemo* ***pripisana kružnica*** *tog trokuta.*

Uočimo da svaki trokut ima tri pripisane kružnice. Uvedimo oznaku

$\rightsquigarrow$ I_A, I_B, I_C su središta pripisanih kružnica koje redom s vanjske strane diraju stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$.



Zadatak 12.
Dokažite da je $\{I, I_A, I_B, I_C\}$ ortocentrička četvorka i odredite kružnicu 9 točaka te četvorke.

Posljedica 4. *Neka je T_A polovište luka $\widehat{BC}$ kružnice (ABC) koji ne sadrži točku A. Tada točke B, I, C, I_A leže na kružnici sa središtem u točki T_A.*

Dokaz. Uočimo da je T_A zapravo drugo sjecište simetrale AI i kružnice (ABC). Prema prethodnom zadatku slijedi da je T_A polovište dužine I_AI pa tvrdnja slijedi iz činjenice $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90°$ te obrata Talesovog poučka. □

Napomena 4. *Označimo sa V_A drugo sjecište pravca I_BI_C i kružnice (ABC). Prema prethodnom je zadatku V_A upravo polovište dužine $\overline{I_BI_C}$. Zbog*

$$\angle I_CBI_B = \angle I_CCI_B = 90°$$

i obrata Talesovog poučka slijedi da točke B, C, I_B, I_C leže na kružnici sa središtem u točki V_A.

Nadalje, zbog $\angle T_AAV_A = 90°$ prema obratu Talesovog poučka slijedi da je $\overline{T_AV_A}$ promjer kružnice (ABC). Dakle, V_A je ujedno i polovište luka $\widehat{BC}$ kružnice (ABC) koji sadrži točku A.

Za kraj, navedimo još jedno od najljepših svojstava kružnice 9 točaka (a i jedan od ljepših teorema geometrije trokuta uopće).

Teorem 3 (Feuerbach)**.** *Kružnica 9 točaka dira upisanu i sve tri pripisane kružnice trokuta. Pritom upisanu kružnicu dira iznutra, a pripisane kružnice izvana.*

Točka u kojoj se dodiruju upisana kružnica i kružnica 9 točaka zove se **Feuerbachova točka** trokuta. Feuerbachov se teorem može dokazati direktnim računom (računanjem udaljenosti središta navedenih kružnica, korištenjem trigonometrije) ili naprednijim tehnikama (primjenom inverzije), što ovdje nećemo raditi.

Rješenja nekih zadataka

Rješenje zadatka 2. Trokuti ACN_A i ABN_A su pravokutni te su im P_B i P_C redom polovišta hipotenuza, tj. središta opisanih kružnica. Zato slijedi

$$|P_BN_A| = |P_BC| = |P_CP_A|, \quad |P_CN_A| = |P_CB| = |P_BP_A|$$

pa tvrdnja zadatka slijedi primjenom SSS poučka o sukladnosti.

Rješenje zadatka 3. Za ovu je tvrdnju dovoljno dokazati $\angle Q_AP_BP_A = 90°$. Budući da su $\overline{Q_AP_B}$ i $\overline{P_BP_A}$ srednjice u trokutima AHC i CAB, imamo $Q_AP_B \parallel HC$ i $P_BP_A \parallel AC$. Tvrdnja slijedi iz okomitosti pravaca HC i AC.

Rješenje zadatka 4. P_BQ_C je srednjica u trokutu CAH pa vrijedi $P_BQ_C \parallel Q_AH$ i $|P_BQ_C| = |Q_AH|$. No, zbog $AH \perp BC$ slijedi $P_BQ_C \parallel OP_A$. Jednako tako, zbog $BH \perp CA$ i činjenice da je $\overline{P_AQ_C}$ srednjica u trokutu CBH slijedi $P_AQ_C \parallel OP_B$. Dakle, $OP_AQ_CP_B$ je paralelogram pa imamo $|OP_A| = |P_BQ_C|$. Slijedi $OP_A \parallel AH$ i

$$|OP_A| = |P_BQ_C| = |Q_AH| = \frac{1}{2}|AH|.$$

Rješenje zadatka 5. Iz rješenja prethodnog zadatka slijedi

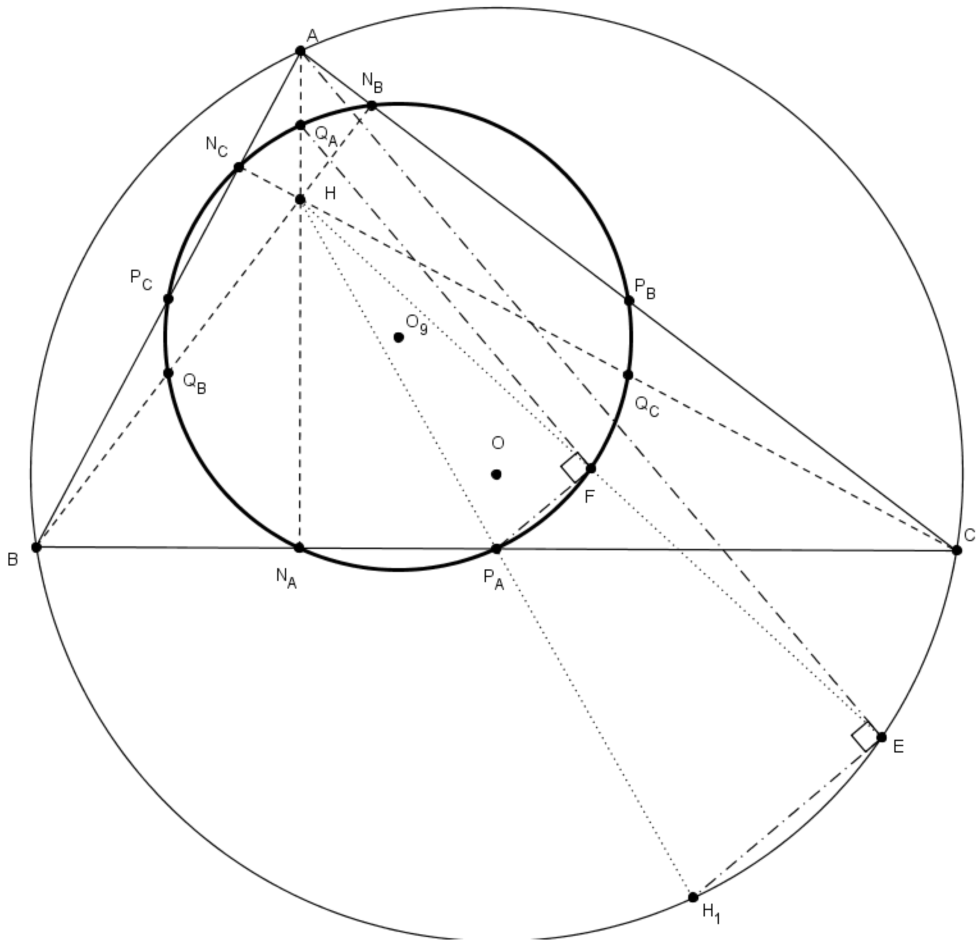
$$OP_A \parallel Q_AH, \quad |OP_A| = |Q_AH|$$

pa je OP_AHQ_A paralelogram. Budući da je, prema posljedici 2, O_9 polovište jedne dijagonale, to je O_9 polovište i druge dijagonale, tj. dužine $\overline{OH}$.

Rješenje zadatka 6. $\overline{Q_BO_9}$ je srednjica u trokutu HBO pa slijedi $R_9 = |Q_BO_9| = \frac{|OB|}{2} = \frac{R}{2}$.

Rješenje zadatka 7. Dovoljno je dokazati $O_9P_A \parallel OA$. No, ova tvrdnja slijedi iz činjenice $O_9Q_A \parallel OA$ (koja slijedi iz rješenja prethodnog zadatka) te posljedice 2, tj. činjenice da su Q_A, O_9 i P_A kolinearne točke.

Rješenje zadatka 8.

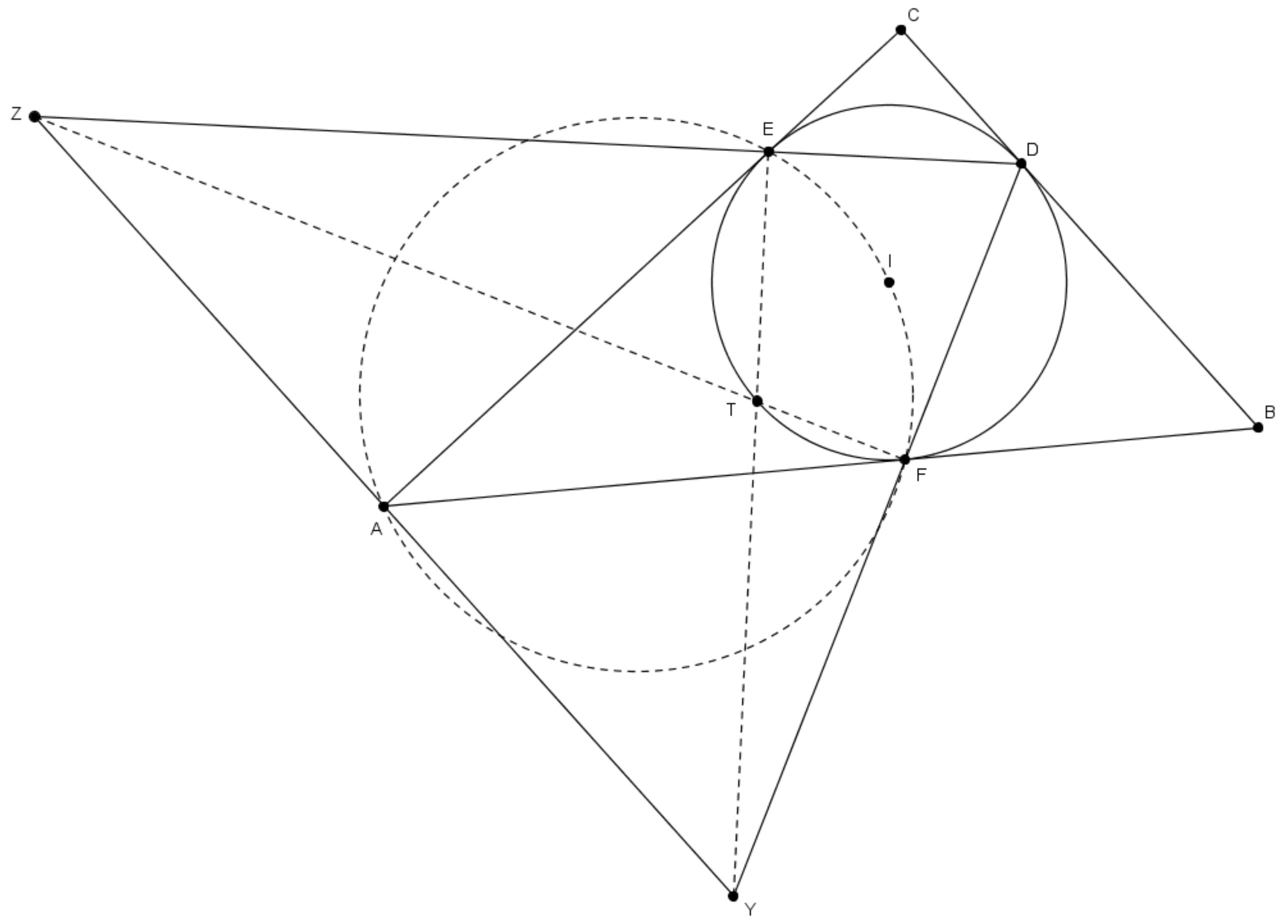


Neka je E proizvoljna točka na kružnici (ABC) te neka je F polovište dužine $\overline{HE}$. Tvrdimo da F leži na k_9.

Neka je H_1 centralnosimetrična slika točke H s obzirom na točku P_A. Uočimo da se pri istoj centralnoj simetriji točka B preslikava u C. Zato se pravac BH preslikava u pravac H_1C, tj. $BH \parallel H_1C$ pa su pravci CA i H_1C okomiti. Dakle, $\angle H_1CA = 90°$ ($\overline{AH_1}$ je promjer kružnice (ABC)).

Budući da su $\overline{P_AF}$ i $\overline{Q_AF}$ redom srednjice u trokutima HH_1F i AHF, slijedi $P_AF \parallel H_1F$ i $Q_AF \parallel AF$. Odavde dobivamo $\angle P_AFQ_A = \angle H_1FA = 90°$ pa prema posljedici 2 slijedi da F leži na k_9.

Rješenje zadatka 9.



Uočimo da je

$$\angle AZE = \angle CDE = \angle CED = \angle ZEA,$$

pri čemu prva jednakost vrijedi zbog $ZY \parallel BC$, druga zbog činjenice da su CD i CE tangente na upisanu kružnicu, a treća zbog jednakosti vršnih kutova. Dakle, $|AZ| = |AE|$. Analogno dobijemo $|AY| = |AF|$ pa zbog $|AE| = |AF|$ slijedi $|AY| = |AZ|$, tj. A je polovište dužine $\overline{YZ}$.

Nadalje, uočimo da iz

$$|AZ| = |AE| = |AY|$$

slijedi da je trokut ZEY pravokutan (jer mu se središte opisane kružnice, A, nalazi na jednoj od stranica) pa imamo $YE \perp ZD$, tj. E je nožište visine iz vrha Y na stranicu $\overline{ZD}$ trokuta DZY. Analogno dobivamo da je točka F nožište visine iz vrha Z na stranicu $\overline{DY}$. Dakle, opisana kružnica trokuta AEF zapravo je kružnica 9 točaka trokuta DZY pa na toj kružnici očito leže i točke E' i F'.

Uočimo još da četverokut $AEIF$ ima dva nasuprotna kuta prava pa je tetivan, tj. točka I također leži na toj kružnici.

Rješenje zadatka 10. Promotrimo, na primjer, trokut ABH. Uočimo da u tom trokutu vrijedi

- C je ortocentar,
- P_A, P_B, Q_C su polovišta dužina koje spajaju ortocentar tog trokuta s njegovim vrhovima,
- Q_A, Q_B, P_C su polovišta stranica,
- N_A, N_B, N_C su nožišta visina.

Dakle, kružnice 9 točaka trokuta ABH i ABC se podudaraju pa ti trokuti imaju i zajedničko središte kružnice 9 točaka O_9. Budući da prema napomeni 1 središte kružnice 9 točaka leži na Eulerovom pravcu trokuta, slijedi tvrdnja zadatka.

Rješenje zadatka 11. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Neka je O središte kružnice (ABC) te O_A, O_B i O_C redom središta kružnica (BCH), (CAH) i (ABH).

Uočimo da prema zadatku 1 osna simetrija s obzirom na stranicu $\overline{BC}$ preslikava kružnicu (ABC) u (BHC) pa stoga ona preslikava točku O u točku O_A. Dakle, točke O_A, O_B i O_C su redom osnosimetrične slike točke O s obzirom na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$. Posebno,

$$P_AP_B \parallel O_AO_B, \quad P_BP_C \parallel O_BO_C, \quad P_CP_A \parallel O_CO_A,$$

a budući da je O ortocentar trokuta $P_AP_BP_C$, to je O također i ortocentar trokuta $O_AO_BO_C$. Dakle, $\{O_A, O_B, O_C, O\}$ je ortocentrička četvorka.

Uočimo da prema posljedici 3 imamo

$$|HO_A| = |HO_B| = |HO_C| = R,$$

tj. H je središte kružnice $(O_AO_BO_C)$. Zato je prema zadatku 5 središte kružnice 9 točaka trokuta $O_AO_BO_C$ polovište dužine $\overline{OH}$ i podudara se sa središtem kružnice 9 točaka trokuta ABC. Uočimo i da se prema zadatku 6 radijusi tih kružnica također podudaraju i iznose $\frac{R}{2}$. Dakle, kružnice 9 točaka ortocentričkih četvorki $\{A, B, C, H\}$ i $\{O_A, O_B, O_C, O\}$ se uistinu podudaraju.

Rješenje zadatka 12. Iz činjenice da su simetrale susjednih kutova međusobno okomite slijedi

$$I_AA \perp I_CA, \; I_AA \perp I_BA$$

pa slijedi da su točke A, I_B i I_C kolinearne te $I_AA \perp I_BI_C$. Analogno se pokaže i $I_BB \perp I_CI_A$, $I_CC \perp I_AI_B$, a budući da se pravci I_AA, I_BB, I_CC sijeku u I, slijedi da je I ortocentar trokuta $I_AI_BI_C$. Nadalje, budući da su A, B, C očito nožišta visina u tom trokutu, slijedi da je kružnica 9 točaka trokuta $I_AI_BI_C$ upravo kružnica (ABC).