MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Princip ekstrema

22.10.2016.

Uvod/teorijske osnove

Za ovo predavanje potrebno je poznavanje Dirichletovog principa i njegove primjene u zadacima. Za više o tome pogledajte predavanje *Dirichletov princip*. Također, osim Dirichletovog principa potrebno je dobro razumjeti što znači dokazati neku tvrdnju, pa se preporuča čitanje predavanja *Što je dokaz?* kako biste bili spremni za ovo predavanje.

Često je u kombinatornim zadacima korisno pogledati neki element koji je ekstreman - minimalan ili maksimalan po nekom svojstvu. Ispostavlja se da promatranje takvih elemenata ili situacija često može jako pojednostavniti zadatak. Promotrimo sljedeći zadatak (predavanje *Dirichletov princip*, 5. zadatak):

Zadatak 1.
Na zabavi se nalazi 10000 ljudi. U nekom trenutku neke su se osobe počele rukovati. Dokažite da postoje 2 osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

Rješenje.
Počinjemo tako da pretpostavimo da tvrdnja zadatka ne vrijedi. Onda se nijedne dvije osobe nisu rukovale s istim brojem ljudi. Budući da se osoba ne može rukovati sama sa sobom, može se rukovati s najviše 9999 ljudi, a najmanje s 0. To znači da ukupno ima 10000 različitih ljudi s kojima se neka osoba mogla rukovati, a kako se 10000 osoba rukovalo, slijedi da za svaki broj od 0 do 9999 postoji osoba koja se rukovala s tim brojem ljudi. To znači da postoji osoba koja se nije rukovala ni s kim i osoba koja se rukovala sa svima, a to je nemoguće jer se nije mogla rukovati s osobom koja se nije rukovala ni s kim.

Primijetimo da nam je u dokazu zadatka bilo ključno promatrati osobu koja se nije rukovala ni s kim i osobu koja se rukovala sa svima, dakle s najmanje i najviše mogućih ljudi. Na sličan način rješava se i sljedeći zadatak:

Zadatak 2.
Na zabavi je bilo 5 parova (Ana i Marko i još 4). Bilo je nekoliko rukovanja i nakon toga je Marko pitao sve ostale s koliko su se ljudi rukovali, te je dobio 9 različitih odgovora. S koliko se ljudi rukovala Ana?

Metoda kontradikcije

Najčešće se princip ekstrema koristi za dokazivanje metodom kontradikcije. To radimo na način da pretpostavimo da je neki element maksimalan (ili minimalan) te pronađemo neki drugi element koji je veći (ili manji) od njega. Tada dobivamo kontradikciju s pretpostavkom o maksimalnosti, ili minimalnosti tog elementa. Promotrimo to na sljedećem primjeru:

Zadatak 3.
U ravnini se nalazi konačno crvenih i plavih točaka. Na svakoj dužini čiji su krajevi crvene točke postoji plava točka, a na svakoj dužini čiji su krajevi plave točke, postoji crvena točka. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.

Rješenje.
Pretpostavimo suprotno, da nisu sve točke na istom pravcu. To znači da postoje neke tri točke (barem jedan skup od 3 točke) koje su vrhovi trokuta. Među svim trokutima (ima ih konačno jer je točaka konačno) odaberemo onaj najmanje površine. Budući da trokut ima 3 vrha, barem 2 vrha su iste boje (recimo plave i nazovimo ih A i B, a preostalu točku C). Tada na stranici $\overline{AB}$ točaka postoji crvena točka D. Ako promotrimo neki od trokuta $\triangle ADC$ ili $\triangle BCD$, oni imaju strogo manju površinu od pretpostavljenog "minimalnog" trokuta. Kontradikcija. Dakle, ne postoje tri točke koje čine trokut pa sve točke leže na istom pravcu.

Kada postoji ekstrem?

Promotrimo sljedeća 2 slična primjera:

Zadatak 4.
20 realnih brojeva poredano je u krug, na način da se između svaka 2 broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažite da su svi brojevi u krugu jednaki.

Rješenje.
Promotrimo najveći od tih 20 brojeva. On je aritmetička sredina (prosjek) svoja 2 susjeda, pa je jedan od susjeda veći ili jednak njemu, a drugi manji ili jednak njemu. (Dokažite da je $\frac{a+b}{2}$ uvijek veći ili jednak manjem od brojeva a i b i manji ili jednak većem od tih brojeva). Budući da promatramo najveći broj, taj njegov susjed ne može biti veći od njega, nego jednak njemu. Sada je i njegov drugi susjed jednak njemu te se dalje proširujemo na cijeli krug pomoću svojstva. (Dokažite da ako u krugu imamo dva jednaka broja jedan pored drugog, da su tada svi jednaki). Dakle, svi brojevi u krugu su jednaki.

Jesmo li mogli prethodni zadatak riješiti promatrajući najmanji broj?

Kada u zadatku odlučimo promatrati neki ekstrem, vrlo je bitno biti siguran da takav ekstrem sigurno postoji. To je vrlo jednostavno kad promatranih elemenata imamo konačno, kao u prošlom zadatku, ali kada ih imamo beskonačno, ne možemo biti sigurni da će ekstrem postojati. Slijedi primjer takvog zadatka:

Zadatak 5.
Na beskonačnom pravcu označene su točke razmaknute po 1 cm. Svakoj od tih točaka pridružen je prirodan broj, a svaki je broj prosjek svojih susjeda. Dokažite da su svi brojevi na pravcu jednaki.

Rješenje.
Primijetimo da je zadatak vrlo sličan prethodnom zadatku, ali sada imamo beskonačno brojeva. Sada nije moguće gledati najveći broj, jer nismo sigurni da će takav broj postojati (za svaki prirodan broj postoji prirodan broj veći od njega). Međutim, skup prirodnih brojeva odozdo je ograničen (najmanji prirodan broj je 1), a skup svih brojeva na pravcu je podskup skupa prirodnih brojeva. Dakle, na pravcu postoji najmanji broj. Kao u prethodnom zadatku, taj je broj prosjek svojih susjeda, pa postoji susjed koji je manji ili jednak njemu. Budući da on nije manji, mora biti jednak te nastavljamo kao u prošlom zadatku. Dakle, svi brojevi na pravcu su jednaki.

Rješavanje sustava jednadžbi pomoću principa ekstrema

Ponekad je princip ekstrema korisno primijeniti u sustavima jednadžbi. Slijedi primjer:

Zadatak 6.
Riješite sustav u skupu $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z \\ (y+z)^3 = x \\ (x+z)^3 = y \end{cases}$$

Rješenje.
Pretpostavimo da je x najveći od ta 3 broja (dakle $x \geqslant y$ i $x \geqslant z$). Iz $x \geqslant y$ slijedi $(y+z)^3 \geqslant (x+z)^3$. Dakle $y+z \geqslant x+z$ pa je $y \geqslant x$. Dakle, $x = y$. Ako ponovimo postupak s $x \geqslant z$, dobivamo $x = y = z$. Sada je samo potrebno riješiti jednadžbu $8x^3 = x$ i dobivamo da su jedina rješenja $x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{4}$ i $x = y = z = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Primijetimo da naš dokaz nije potpun, jer što ako x nije najveći, nego je to y ili z ? Kažemo da je sustav jednadžbi **simetričan** ako zamjenom oznaka bilo koje dvije nepoznanice dobivamo isti sustav (poredak jednadžbi nije bitan). U tom slučaju svejedno je za koju nepoznanicu pretpostavimo da je najveća, jer se i za ostale slučajeve dokazuje analogno.

Zadatci

Slijedi veći broj zadataka. U njima će biti potrebno pronaći svojstvo čiji ekstrem treba promatrati i to iskoristiti na dobar način. Pokušajte prvo riješiti zadatke, a tek onda pročitati rješenja.

Zadatak 7.
U ravnini stoji nekoliko ljudi, pri čemu su sve udaljenosti među njima različite. U nekom trenutku svatko puca u svog najbližeg susjeda.

(a) Dokažite da postoje 2 ljudi koji su pucali jedan u drugog.

(b) Dokažite da ne postoji zatvoreni poligon ljudi koji su se međusobno pucali.

(c) Dokažite da nitko nije primio više od 5 metaka.

(d*) Dokažite da je, ako ih je bilo neparno, barem jedan preživio.

Zadatak 8.
Dokažite da u svakoj trostranoj piramidi postoji vrh iz kojeg izlaze 3 brida koji čine stranice trokuta.

Zadatak 9.
Dokažite da svaki poliedar ima barem 2 stranice s jednakim brojem vrhova.

Zadatak 10.
U ravnini se nalazi skup točaka takav da je svaka točka polovište neke dužine čije su krajnje točke također iz tog skupa. Dokažite da je taj skup točaka beskonačan.

Zadatak 11.
Od n točaka u ravnini nikoje 3 ne čine trokut površine veće od 1. Dokažite da se sve te točke mogu prekriti trokutom površine ne veće od 4.

Zadatak 12.
n realnih brojeva poredano je u krug, na način da se između svaka 2 broja a i b nalazi broj $\sqrt{ab}$. Dokaži da su svi brojevi u krugu jednaki.

Zadatak 13.
Na beskonačnoj šahovskoj ploči u svakom se polju nalazi jedan prirodan broj. Svaki je broj jednak aritmetičkoj sredini (prosjeku) svojih susjeda. Dokažite da su svi brojevi na ploči jednaki.

Zadatak 14.
Riješite sustav u skupu $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_1^2 x_4 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

Zadatak 15.
U tablici $n \times n$ napisani su brojevi od 1 do n^2. Dokažite da postoje 2 susjedna polja koja se razlikuju za barem $n+1$. Susjednim poljima podrazumijevamo ona koja dijele barem 1 vrh.

Rješenja zadataka

Rješenje zadatka 7.

(a) Od svih međusobnih udaljenosti među ljudima postoji ona najmanja, neka je to udaljenost između A i B. Tada je to i najmanja od udaljenosti između A i nekog drugog, i najmanja među udaljenostima od B do nekog drugog, pa su A i B pucali jedan u drugog.

(b) Pretpostavimo da takav poligon postoji. Tada bi on imao najdulju stranicu, neka su u njenim vrhovima osobe C i D (pretpostavimo da je C pucao u D). Ta je stranica dulja od obiju svojih susjednih stranica. Dakle udaljenost od C do D veća je od udaljenosti između C i njegovog drugog susjeda u poligonu, što znači da je $|CD|$ nije najmanja udaljenost od C do nekog od ostalih. Dakle, C je pucao u nekog drugog pa takav poligon ne postoji.

(c) (Neka vas iste oznake ne bune, nemaju veze s prva 2 dijela zadatka). Pretpostavimo da je netko primio barem 6 metaka i nazovimo tu osobu A, a ljude koji su pucali u njega B, C, D, E, F, G u smjeru kazaljke na satu (to znači da podrazumijevamo npr. $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ itd.). Tada vrijedi $\angle BAC + \angle CAD + \angle DAE + \angle EAF + \angle FAG + \angle GAB = 360°$, pa je barem jedan od tih 6 kuteva manji ili jednak $60°$. Pretpostavimo da je to $\angle BAC$. Budući da su sve udaljenosti među ljudima različite, jednakostranični trokuti ne postoje, pa je jedan od kuteva $\angle ABC$ i $\angle BCA$ veći od $\angle BAC$. Pretpostavimo da je $\angle ABC > \angle BAC$. U trokutu vrijedi pravilo da je veća stranica uvijek nasuprot većem kutu, dakle vrijedi $|AC| > |BC|$. Iz toga slijedi da $|AC|$ nije najmanja među udaljenostima od C do nekog drugog, pa C nije pucao u A. Dakle, nitko nije primio više od 5 metaka.

(d*) Za ovaj dokaz bit će nam potrebna metoda matematičke indukcije, o kojoj, ako ju već ne znate, možete ponešto naučiti u online predavanju *Matematička indukcija* (zato je označen zvjezdicom). Baza za $n = 1$, odnosno za $2n + 1 = 3$ riješena je u prvom dijelu zadatka (postoje dvojica koji su pucali jedan u drugog, dakle treći sigurno preživljava). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve konfiguracije $2n + 1$ ljudi za neki prirodan broj n. Korak uključuje promatranje najbližeg para u ravnini s $2n + 3$. Oni su pucali jedan u drugog. Ako je još netko pucao u taj par, tada su na njih dvoje potrošena 3 metka, i za ostalih $2n + 1$ ostalo je samo $2n$ metaka, pa je netko preživio. U suprotnom, taj par možemo zanemariti jer ne utječe ni na koji način na ostalih $2n + 1$ ljudi. Tako se vraćamo u neku konfiguraciju $2n + 1$ ljudi i time smo gotovi. Dakle, netko je sigurno preživio.

Rješenje zadatka 8. Primijetimo da je zapravo potrebno dokazati da 3 brida koje izviru iz nekog vrha zadovoljavaju nejednakost trokuta (zbroj duljina dviju kraćih stranica veći je od duljine najduže stranice). Promotrimo najdulji brid piramide i nazovimo ga a (on sigurno postoji jer je bridova konačno, točnije 6). Neka on spaja vrhove X i Y, a ostala 2 vrha nazovimo Z i W. Bridovi a, $\overline{XZ}$ i $\overline{YZ}$ čine trokut $\triangle XYZ$ pa za njih vrijedi nejednakost trokuta : $|XZ| + |YZ| > a$. Također, a, $\overline{XW}$ i $\overline{YW}$ čine trokut $\triangle XYW$, pa vrijedi: $|XW| + |YW| > a$. Dakle, $|XZ| + |YZ| + |XW| + |YW| > 2a$, pa mora vrijediti ili $|XZ| + |XW| > a$, ili $|YZ| + |YW| > a$ (Kad bi u oba slučaja vrijedile suprotne nejednakosti, zbrajanjem bi dobili $|XZ| + |YZ| + |XW| + |YW| \leqslant 2a$). Dakle, u nekom od vrhova X ili Y su 3 brida koji čine stranice trokuta.

Rješenje zadatka 9. Prisjetimo se da svaki mnogokut ima jednaki broj vrhova i stranica (bridova). Promotrimo stranicu (plohu) omeđenu najvećim brojem bridova i neka je taj broj bridova jednak n (takva stranica sigurno postoji jer svaki poliedar ima konačan broj stranica). Ukoliko takva stranica nije jedinstvena, gotovi smo. Ta stranica graniči s n drugih stranica, od kojih svaka može imati najmanje 3, a najviše $n - 1$ vrh. To je $n - 3$ mogućnosti, a n stranica, pa po Dirichletovom principu dvije stranice moraju imati jednak broj vrhova.

Rješenje zadatka 10. Pretpostavimo suprotno, da je točaka konačno mnogo. Tada postoji najveća od svih međusobnih udaljenosti dviju točaka, neka je to udaljenost između točaka A i B. Neka je B polovište dužine $\overline{CD}$. Tada postoje 2 slučaja: trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ su oba pravokutni ili je jedan od njih tupokutan ($\angle ABC + \angle ABD = 180°$, pa su oni ili oba pravi, ili je jedan tup, jedan šiljast). U prvom slučaju je $\overline{AC}$ hipotenuza, a $\overline{AB}$ kateta pravokutnog trokuta $\triangle ABC$, pa je $|AC| > |AB|$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $|AB|$ najveća udaljenost među točkama. U drugom slučaju, neka je $\triangle ABC$ taj tupokutan trokut. Tada je AC stranica nasuprot tupom kutu, pa opet vrijedi $|AC| > |AB|$. Kontradikcija, dakle skup točaka ne može biti konačan.

Rješenje zadatka 11. Budući da je točaka konačno, one čine konačan broj trokuta, pa među tim trokutima postoji trokut maksimalne površine (trokut $\triangle ABC$). Promotrimo trokut kojem su $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{CA}$ srednjice i nazovimo ga $\triangle XYZ$. Površina tog trokuta točno je 4 puta veća od površine trokuta $\triangle ABC$, dakle nije veća od 4, a mi tvrdimo da su sve točke iz skupa unutar tog trokuta. Pretpostavimo suprotno, da se točka D nalazi izvan trokuta. Tada se ona nalazi s druge strane barem jednog od pravaca XY, YZ i XZ. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se nalazi s druge strane pravca XY, koji je paralelan s AB. Tada je površina trokuta $\triangle ABD$ veća od površine trokuta $\triangle ABC$ (imaju zajedničku stranicu AB, a $\triangle ABD$ ima dulju visinu. To je u suprotnosti s pretpostavkom da $\triangle ABC$ ima najveću površinu. Dakle, takva točka D ne postoji i sve se nalaze unutar trokuta $\triangle XYZ$.

Rješenje zadatka 12. Zadatak je vrlo sličan zadatku 4. Za $a \geqslant b$, za broj $\sqrt{ab}$ vrijedi $a \geqslant \sqrt{ab} \geqslant b$ (dokažite to). Promotrimo minimalni od tih brojeva i nazovimo ga x (on sigurno postoji jer je brojeva n, dakle konačno). On je geometrijska sredina svojih susjeda pa je, ukoliko oba susjeda nisu jednaki njemu, jedan od njegovih susjeda manji od njega, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je x najmanji broj na kružnici. Dakle, oba njegova susjeda jednaki su x, pa su i svi brojevi na kružnici jednaki x.

Rješenje zadatka 13. Primijetimo da je zadatak vrlo sličan zadatku 5. Primijetite da je aritmetička sredina četiri broja veća ili jednaka najmanjem od tih brojeva i manja od najvećeg od tih brojeva. Kao i u zadatku 5, opet je skup brojeva na ploči podskup skupa prirodnih brojeva pa ima minimalni element. On je aritmetička sredina svojih četiriju susjeda, pa je veći ili jednak najmanjem od tih brojeva (u slučaju jednakosti sva su 4 broja jednaka). Kao i u prethodnom zadatku, slijedi da su mu svi susjedi jednaki, a tada i svi brojevi na ploči.

Rješenje zadatka 14. Sustav jednadžbi je **cikličan** ako zamjenjivanjem oznaka u (x_1, x_2, x_3, x_4) nekim njihovim drukčijim cikličkim poretkom. dobivamo isti sustav jednadžbi. $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_2, x_3, x_4, x_1) \to (x_3, x_4, x_1, x_2) \to (x_4, x_1, x_2, x_3)$. U cikličkom sustavu jednadžbi možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti najveći element. Pretpostavimo zato da je x_1 najveći element. To podrazumijeva $x_1 \geqslant x_2 \Rightarrow {x_1}^2 \geqslant {x_2}^2$. Dakle $x_3 + x_4 \geqslant x_4 + x_1 \Rightarrow x_3 \geqslant x_1 \Rightarrow x_3 = x_1$, jer zbog pretpostavke vrijedi $x_1 \geqslant x_3$. Sada je i ${x_3}^2 = {x_1}^2 \Rightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ (zbog $x_1 = x_3$)$\Rightarrow x_2 = x_4$. Sada je $x_2 + x_3 = x_4 + x_3 \Rightarrow {x_4}^2 = {x_1}^2$ Zbog toga što su x_1 i x_4 pozitivni realni brojevi, vrijedi $x_1 = x_4$, a s time i $x_3 = x_1 = x_4 = x_2$. Sada je samo potrebno riješiti jednadžbu $2x_1 = {x_1}^2$. Rješenja su $x_1 = 0$ i $x_1 = 2$, ali 0 nije pozitivan broj. Dakle, jedino rješenje je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$.

Rješenje zadatka 15. Promotrimo put po ploči između najmanjeg i najvećeg broja (1 i n^2). Taj put je dugačak najviše $n-1$ korak. Pretpostavimo da smo u svakom koraku prešli razliku koja je manja ili jednaka n. Tada smo ukupno prešli razliku od najviše $(n-1)n = n^2 - n$. Međutim, razlika koju trebamo prijeći je $n^2 - 1 > n^2 - n$. Dakle, u barem jednom koraku moramo napraviti korak od barem $n + 1$.