MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Matematička indukcija (dio II)

30.10.2016.

Prije čitanja ovog predavanja podsjetite se predavanja *Matematička indukcija* i kako se dokazuju tvrdnje principom matematičke indukcije. U ovom predavanju koristit ćemo neke kompleksnije oblike matematičke indukcije.

Princip jake indukcije

U klasičnom principu matematičke indukcije pretpostavljamo da tvdrnja vrijedi za prirodan broj n i pokazujemo da tada vrijedi i za $n+1$. Ponekada nam za dokaz nije dovoljno da tvrdnja vrijedi za n, nego je potrebno da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve manje ili jednake n, to jest za $1, 2, ..., n$, pa onda pomoču toga dokazujemo da vrijedi i za $n+1$. Ovakav način dokazivanja nazivamo *princip jake matematičke indukcije.* Dakle, princip jake matematičke indukcije provodimo kroz sljedeća tri dijela

(i) *Baza indukcije*
Pokazujemo da tvrdnja koju trebamo dokazati vrijedi za $n=1$.

(ii) *Pretpostavka indukcije*
Pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za brojeve $1, 2, \ldots, n$ (za neki $n \in \mathbb{N}$).

(iii) *Korak indukcije*
Ako iz pretpostavke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$, tada tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Indukcija s većim korakom

U nekim zadacima bit će lagano pokazati da ako tvrdnja vrijedi za prirodan broj n, tada vrijedi i za $n+2$ ili $n+3$. Ukoliko korak indukcije provodimo tako da iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ dokazujemo da tvrdnja vrijedi za $n+k$ ($k \in \mathbb{N}$), tada u bazi indukcije moramo provjeriti da tvrdnja vrijedi za prvih k prirodnih brojeva kako bismo dokazali da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Obrat indukcije

Kao što i ime govori, ideja obrata indukcije je upravo obrnuta od principa matematičke indukcije. Dokazujemo da ako tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N}$, vrijedi i za $n-1$. Ovo može biti korisno ukoliko želimo dokazati da neka tvrdnja vrijedi za sve cijele brojeve, jer tada u kombinaciji s klasičnom indukcijom to vrlo lagano možemo dobiti. Drugi koristan način za iskoristiti obrat indukcije je primijetiti da ona dokazuje da ako tvrdnja vrijedi za n, vrijedi i za sve manje brojeve. Dakle, ako možemo dokazati da tvrdnja vrijedi za neki rastući niz prirodnih brojeva (to su često svi brojevi oblika 2^n, ili slično), tada obratom indukcije lagano dobivamo da vrijedi za sve brojeve.

Drugi pogled na matematičku indukciju

Još jedna bitna stvar za znati o indukciji je to da se na nju može gledati na dva različita načina. Jedan je onaj kako se indukcija klasično uči, da pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n i dokazujemo da iz toga slijedi da vrijedi za $n+1$. Drugi način gledanja na indukciju je ne kretati od n i dovoditi do $n+1$ nego krenuti od $n+1$ i pokušati svesti dokazivanje tvrdnje za $n+1$ na dokazivanje tvrdnje za n.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Dokažite da se n pravaca u općem položaju siječe u ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.
Napomena: kažemo da se pravci nalaze u *općem položaju* ukoliko nikoja tri od njih ne prolaze istom točkom i nikoja dva nisu paralelna.

Rješenje.
Rješenje ćemo provesti matematičkom indukcijom.
(i) *Baza*
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi (jedan pravac se s 0 ostalih pravaca siječe u 0 točaka).
(ii) *Pretpostavka*
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da se n pravaca u općem položaju siječe u $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.
(iii) *Korak*
Dodajmo još jedan pravac na ovih n pravaca. Taj novi pravac svaki od preostalih mora sjeći u točno jednoj točki, što daje n novih sjecišta. Dakle, nakon dodavanja pravca imamo $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{(n+1)n}{2}$ točaka.
Korak indukcije je dokazan pa prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.

Zadatak 2.
Može li se ploču dimenzija 3×99 popločati L-triominama (pločicama od 3 kvadratića u obliku slova L)?

Rješenje.
Matematičkom indukcijom ćemo pokazati da se $3 \times n$ tabla može pokriti za sve parne n i da se ne može pokriti ni za jedan neparni n.
(i) *Baza*
Za $n = 1$ je očito nemoguće popločati jer je nemoguće postaviti iti jednu triominu. Za $n = 2$ je moguće (pokažite to sami za vježbu).
(ii) *Pretpostavka*
Pretpostavimo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $3 \times 2n$ ploču moguće popločati, a $3 \times (2n - 1)$ nije.
(iii) *Korak*
Promotrimo $3 \times (2n + 1)$ ploču. Da bismo popunili čitav prvi red, nužno je staviti dvije triomine, jednu okrenutu tako da je dva polja u njoj, drugu tako da je jedno. To znači da smo time popunili i cijeli drugi red. Dakle, da bi bilo moguće popločati $3 \times (2n+1)$ ploču, moramo moći popločati i $3 \times (2n-1)$ ploču. Budući da to prema induktivnoj pretpostavci nije moguće, vidimo da niti $3 \times (2n + 1)$ nije moguće popločati.
Promotrimo sada $3 \times (2n + 2)$ ploču. Ponovno ispunimo prva dva reda - time smo problem sveli na popločavanje $3 \times 2n$ ploče. Budući da prema induktivnoj pretpostavci znamo da je to moguće, vidimo da se i $3 \times (2n + 2)$ ploča može popločati.

Zadatak 3.
Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ broj $3^{2^n} - 1$ djeljiv s 2^{n+2}, ali ne i s 2^{n+3}.

Rješenje.
Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.
(i) *Baza*
Za $n = 1$ imamo $3^{2^1} - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$. Vidimo da je 8 djeljivo s $2^{1+2} = 2^3 = 8$, ali nije s $2^{1+3} = 16$.
(ii) *Pretpostavka*
Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi da je $3^{2^n} - 1$ dijeljivo s 2^{n+2}, ali nije s 2^{n+3}.
(iii) *Korak*
Promotrimo broj $3^{2^{n+1}} - 1$. Primijetimo da je taj broj jednak $3^{2^n \cdot 2} - 1$, tj. $(3^{2^n})^2 - 1$. Sada primjenom razlike kvadrata dobivamo faktorizaciju $(3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$. Razlog zašto smo odabrali baš ovu faktorizaciju je jer se sada u umnošku pojavljuje član koji imamo u induktivnoj pretpostavci. Iskoristimo sada induktivnu pretpostavku, to jest to da je $3^{2^n} - 1$ djeljivo s 2^{n+2} - slijedi da je umnožak $(3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$ djeljiv s 2^{n+2}, a budući da je $3^{2^n} + 1$ također parno, čitav umnožak je djeljiv s 2^{n+3}.
Sada je još potrebno dokazati da gornji umnožak nije dijeljiv s 2^{n+4} za što je potrebno pokazati da $3^{2^n} + 1$ nije djeljivo s 4. Svedimo izraz ponovno na nešto poznato iz induktivne pretpostavke: $3^{2^n} + 1 = 3^{2^n} - 1 + 2$. Po induktivnoj je pretpostavci $3^{2^n} - 1$ dijeljivo s 2^{n+3}, što je uvijek djeljivo s 4, pa je broj $3^{2^n} - 1 + 2$ zbroj broja djeljivog s 4 i broja koji nije djeljiv s 4 (konkretno, broja 2). Dakle, ni čitav zbroj nije djeljiv s 4.

Zadatak 4.
Označimo n-ti po redu prost broj sa p_n. Dokažite da vrijedi $p_n < 2^{2^n}$.

Rješenje.
Koristimo princip jake indukcije.
(i) *Baza*
Za $n = 1$ imamo $p_n = 2$ jer je 2 prvi prosti broj. Zaista, vrijedi $2 < 2^{2^1}$, tj $2 < 4$.
(ii) *Pretpostavka*
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ za prvih n prirodnih brojeva vrijedi $p_n < 2^{2^n}$.
(iii) *Korak*
Broj $p_1 p_2 p_3 ... p_n + 1$ je relativno prost s prvih n prostih brojeva, pa je djeljiv s nekim prostim brojem većim od p_n. Budući da prema induktivnoj pretpostavci vrijedi

$$\begin{aligned} p_1 &< 2^{2^1}, \\ p_2 &< 2^{2^2}, \\ p_3 &< 2^{2^3}, \\ &\vdots \\ p_n &< 2^{2^n}, \end{aligned}$$

slijedi $p_1 p_2 ... p_n < 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot ... \cdot 2^{2^n} = 2^{2^{n+1}-1}$. Iz toga imamo i da je $p_1 p_2 ... p_n < 2^{2^{n+1}}$, pa je i njegov najmanji prost djeljitelj (koji je veći od broja p_n pa je veći ili jednak broju p_{n+1}) manji od $2^{2^{n+1}}$. Time je dokazan korak indukcije.

Zadatak 5.
(**Osnovni stavak aritmetike**) Dokažite da se svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ može prikazati kao umnožak jednog ili više prostih brojeva.

Zadatak 6.
Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1, \quad f(1) = 2.$$

Odredite $f_{|\mathbb{Z}}$, tj. koliko je $f(m)$ za $m \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 7.
Neka je x realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Dokažite da je tada $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 8.
Neka je dan niz prirodnih brojeva a_1, a_2,... takav da za sve n vrijedi $a_n < a_{n+1} \leqslant 2a_n$ i $a_1 = 1$. Dokažite da se svaki prirodan broj može zapisati kao suma različitih brojeva tog niza.

Zadatak 9.
U nekoj su državi svaka dva grada povezana jednosmjernim putem. Dokažite da postoji grad iz kojeg možemo poći i obići sve druge gradove, ali tako da svaki od njih posjetimo samo jednom.

Zadatak 10.
Na kružnoj automobilskoj stazi nalazi se n jednakih automobila. U rezervoarima tih automobila nalazi se gorivo (moguće je da su neki rezervoari prazni). Kad bi se gorivo iz svih automobila prelilo u jedan automobil, on bi imao dovoljno goriva da obiđe čitavu stazu. Dokažite da postoji automobil na stazi koji može obići čitavu stazu ako došavši do nekog automobila pretoči gorivo iz tog automobila u svoj rezervoar.

Zadatak 11.
1024 tenisača sudjelovali su na turniru tako da je svaki od njih igrao protiv svakog od preostalih tenisača. Dokažite da je moguće odabrati njih 11 tako da ih se može poredati u niz na način da je svatko pobijedio sve ljude iza sebe, a izgubio od svih ispred.

Zadatak 12.
(**Lema o rukovanju**) U nekoj skupini ljudi neki su se ljudi međusobno rukovali. Dokažite da je broj ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi paran.

Zadatak 13.
Dokažite da je moguće brojeve $1, 2, ..., n$ poredati u niz tako da aritmetička sredina niti jedna dva broja ne bude između njih.

Zadatak 14.
Dokažite AG nejednakost matematičkom indukcijom, tj. dokažite da za sve pozitivne realne brojeve $a_1, \ldots, a_n$ vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}.$$

Zadatak 15.
Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

za sve realne brojeve x_1 i x_2. Dokažite da tada vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)$$

za proizvoljne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Napomena: funkcije $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi gornja nejednakost zovemo **konkavne funkcije** (funkcije za koje vrijedi suprotna nejednakost zovemo **konveksne funkcije**).

Zadatak 16.
Dokažite mali Fermatov teorem pomoću matematičke indukcije.
Uputa: podsjetite se predavanja *Mali Fermatov i Eulerov teorem.*

Zadatak 17.
Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Zadatak 18.
Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz međusobno različitih prirodnih brojeva koji nisu manji od 2. Dokažite da postoji njegov podniz $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ takav da vrijedi $a_{i_k} > i_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Rješenja i upute za ostale zadatke

Rješenje zadatka 5. Tvrdnju dokazujemo principom jake indukcije.
Za $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi jer je to prost broj. Pretpostavimo da za neki $k \geqslant 2$ tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj $n \leqslant k$.
Ukoliko je broj $k+1$ prost, tvrdnja očito vrijedi. Ukoliko nije prost, postoje prirodni brojevi a, b, $1 < a, b < k+1$, takvi da $k + 1 = a \cdot b$. Sada primjenom pretpostavke indukcije vidimo da tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k + 1$.

Rješenje zadatka 6. Uvrštavanjem $x = y = 0$, $x = y = 1$, $x = 1, y = -1$ dobivamo redom $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f(-1) = 0$. Matematičkom indukcijom pokazujemo da za svaki $m \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(m) = m + 1$.
Za $m = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $m \in \mathbb{Z}$. Imamo

$$f(m+1) = f(m)f(1) - f(m) + 1 = 2(m+1) - (m+1) + 1 = m+2,$$

$$f(m-1) = f(m-1)f(1) - f(m-1+1) + 1 \Rightarrow f(m-1) = f(m) - 1 = m,$$

pa zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki $m \in \mathbb{Z}$.

Uputa za zadatak 7. Kako izgleda izraz $(x + \frac{1}{x})^n$ u raspisanom obliku?

Uputa za zadatak 8. Pokušajte iskoristiti princip jake indukcije.

Rješenje zadatka 9. Za dva grada tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki skup od n gradova. Promatrajmo skup od $n+1$ gradova i istaknimo jedan grad, H. Prema pretpostavci, preostale gradove možemo obići na opisani način - neka je $G_1 \to G_2 \to \cdots \to G_n$ jedan takav obilazak. Ako se iz G_n može stići u H ili iz H u G_1, dokaz je gotov.
U suprotnom iz G_1 direktno možemo stići u H. Neka je G_k grad najmanjeg indeksa iz kojeg se ne može direktno stići u H. Očito je $1 < k \leqslant n$. Tada se iz G_{k-1} direktno može stići u H, a iz H se direktno može stići u G_k. Zato je traženi obilazak

$$G_1 \to G_2 \to \cdots \to G_{k-1} \to H \to G_k \to \cdots \to G_n$$

Rješenje zadatka 10. Ako se na stazi nalazi samo 1 automobil, tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za k automobila koji zajedno imaju dovoljno goriva za obilazak staze.
Neka se na stazi nalazi $k + 1$ automobila. Tada barem jedan od njih može doći do idućeg koristeći samo gorivo iz svog rezervoara (u suprotnom oni svi zajedno ne bi imali dovoljno goriva za obilazak čitave staze). Označimo jedan takav automobil sa A i neka on sa svojom zalihom goriva može stići do automobila B. Umjesto tih dvaju automobila ostavimo na mjestu automobila A jedan automobil s ukupnom količinom goriva iz A i B. Prema pretpostavci slijedi da se staza može obići na traženi način pa se i polazna staza može obići.

Uputa 1 za zadatak 11. Da bismo mogli provesti dokaz matematičkom indukcijom, trebamo zamijeniti konkretne brojeve nekima koji ovise o $n \in \mathbb{N}$ - u ovom slučaju radi se o 2^n i $n + 1$ (za $n = 10$).

Uputa 2 za zadatak 11. Koliko je najmanje tenisača pobijedio tenisač s najviše pobjeda?

Rješenje zadatka 12. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po broju rukovanja unutar grupe. Ukoliko je u grupi bilo samo 1 rukovanje, tvrdnja očito vrijedi (ukupno se dvoje ljudi rukovalo s neparnim brojem drugih, i to dvoje ljudi koji su se međusobno rukovali). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi ukoliko je u grupi bilo n rukovanja. Označimo ljude u toj grupi sa P ili N u ovisnosti o tome jesu li se rukovali s parno ili neparno mnogo drugih ljudi. Ukoliko se u toj grupi još dvoje ljudi rukuje (pa broj rukovanja postane $n + 1$), može se dogoditi jedan od sljedećih slučajeva:

1. Rukovale su se dvije P osobe. Tada su obje postale N osobe pa se broj N osoba povećao za 2, tj. ostao je paran.
2. Rukovale su se P i N osoba. Tada oni postaju N i P osoba pa se broj N osoba nije promijenio (ostao je paran).

3. Rukovale su se dvije N osobe. Tada su obje postale P osobe pa se broj N osoba smanjio za 2, tj. i dalje je ostao paran.

Dakle, tvrdnja zadatka vrijedi i u slučaju kada je u grupi bilo $n+1$ rukovanja.

Uputa za zadatak 13. Ako znamo na taj način poredati brojeve $1, 2, ..., n$, znamo poredati i brojeve $2, 4, ..., 2n$ te brojeve $1, 3, ..., 2n-1$.

Uputa za zadatak 14. Prvo pokažite da ukoliko tvrdnja vrijedi za n članova, tada vrijedi i za $2n$. Zatim pokažite da ako vrijedi za n, vrijedi i za $n-1$. Uz bazu za $n=2$, na ovaj način dokazujemo tvrdnju za sve prirodne brojeve (razmislite zašto).

Uputa za zadatak 15. Ideja rješenja je sasvim ista kao u zadatku 14.

Uputa za zadatak 16. Treba dokazati tvrdnju $a^p \equiv a \pmod p$ za sve prirodne brojeve a i prost broj p (u predavanju *Mali Fermatov i Eulerov teorem* je pokazano da je ova tvrdnja ekvivalentna malom Fermatovom teoremu). Za dokaz te tvrdnje razmislite kako izgledaju binomni koeficijenti u raspisu $(a+1)^p$, tj. koje ostatke daju pri djeljenju sa p.

Uputa za zadatak 17. Desna strana ne ovisi o n zbog čega ne možemo provesti korak indukcije. Pokušajte "pojačati" tvrdnju i dokazati nejednakost

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{n}.$$

Rješenje zadatka 18. Egzistenciju traženog podniza dokazat ćemo induktivno. Budući da je $a_1 > 1$, možemo uzeti $i_1 = 1$. Prepostavimo da smo našli prvih n članova tog podniza, $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$. Pretpostavimo da ne možemo naći idući član, tj. da za svaki $j > i_n$ vrijedi $a_j \leqslant j$. Neka je $m = a_{i_n}$. Tada vrijedi

$$\{a_j \mid i_n < j \leqslant m\} \subseteq \{2, 3, \ldots, m\} \setminus \{a_k \mid k = 1, \ldots, i_n\}.$$

No skup na lijevoj strani ima $m - i_n$ elemenata, dok skup na desnoj strani ima $m - 1 - i_n$ elemenata. Kontradikcija, dakle, možemo naći član $a_{i_{n+1}}$.