Pravokutni trokut

13.11.2016.

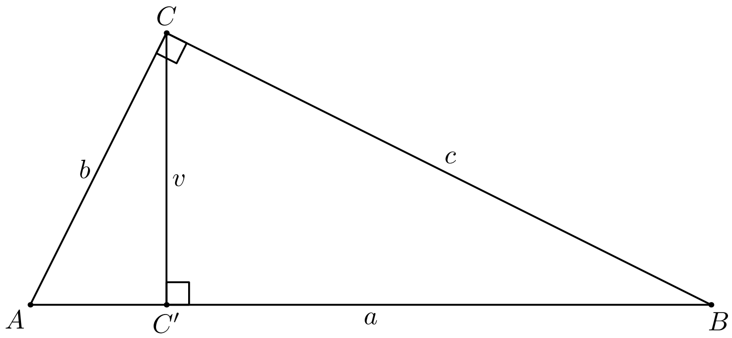
Uvod/teorijske osnove

U ovome predavanju proučavati ćemo svojstva pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ s pravim vrhom u vrhu C. Koristit ćemo sljedeće oznake:

- $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$,
- $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$,
- v je duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$,
- R i r su redom polumjeri opisane i upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$.

Teorem 1 (Pitagorin poučak)**.** *Neka je $\triangle ABC$ pravokutni trokut sa pravim kutom u vrhu C. Tada vrijedi:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



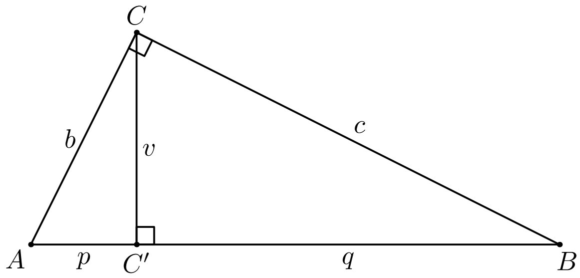
Dokaz teorema 1. Neka je C' nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Tada je je $\angle CC'A = \angle ACB = 90°$, pa su trokuti $\triangle ACC'$ i $\triangle ABC$ slični po K-K poučku. Slično dobivamo da su trokuti $\triangle CBC'$ i $\triangle ABC$ slični. Iz sličnosti slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|AC'|}{b} = \dfrac{b}{c} \implies |AC'| = \dfrac{b^2}{c} \\[2ex] \dfrac{|BC'|}{a} = \dfrac{a}{c} \implies |BC'| = \dfrac{a^2}{c} \end{array}\right\} \implies |AC'| + |BC'| = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} \implies c = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} \implies c^2 = a^2 + b^2.$$

Teorem 2 (Obrat Pitagorinog poučka)**.** *Neka je $\triangle ABC$ trokut u kojemu vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Tada je $\triangle ABC$ pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C.*

Dokaz teorema 2. Neka je $\triangle DEF$ trokut s pravim vrhom u vrhu F takav da vrijedi $EF = a$ i $DF = b$. Tada iz 1 dobivamo: $DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$, pa su trokuti $\triangle DEF$ i $\triangle ABC$ sukladni po S-S-S poučku. Ali tada vrijedi $\angle ACB = \angle DFE = 90°$.

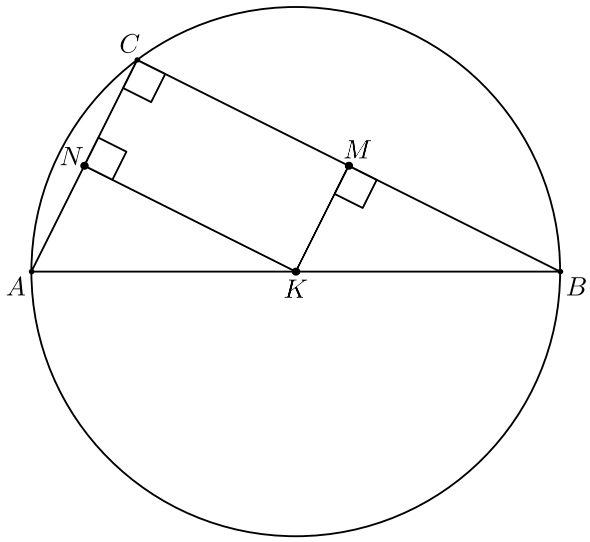
Teorem 3 (Euklidov poučak)**.** *Neka je* $\triangle ABC$ *pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu* C. *Neka je* C' *nožište visine iz* C *na* AB. *Neka je* $p = |AC'|$ *i* $q = |BC'|$. *Tada vrijedi:* $v = \sqrt{pq}$.



Dokaz teorema 3. Lako vidimo da je $\angle CC'A = \angle BC'C$, pa su trokuti $\triangle AC'C$ i $\triangle CC'B$ slični po K-K poučku. Iz sličnosti dobivamo:

$$\frac{v}{p} = \frac{q}{v} \implies v^2 = pq \implies v = \sqrt{pq}.$$

Teorem 4. *Neka je* $\triangle ABC$ *pravokutni trokut sa pravim kutom u vrhu* C. *Neka je* K *polovište dužine* $\overline{AB}$. *Tada je* K *središte opisane kružnice trokuta* $\triangle ABC$.



Dokaz teorema 4. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom. Primijetimo da je $\overline{NK}$ je srednjica paralelna sa $\overline{BC}$, pa je $NK \perp AC$, odakle slijedi da je NK simetrala stranice $\overline{AC}$. Slično se dokazuje i da je MK simetrala stranice $\overline{BC}$. Točka K je sjecište simetrala stranica trokuta, odnosno središte opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Dokažite da je u pravokutnom trokutu polumjer opisane kružnice R jednak $\dfrac{c}{2}$.

Rješenje.
Neka je M polovište stranice AB. Iz Teorema 4 slijedi da je M središte opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$, pa je $R = |MA| = \dfrac{c}{2}$.

Zadatak 2.
Dokažite da u pravokutnom trokutu vrijedi: $v = \dfrac{ab}{c}$.

Prvo rješenje.
Neka je C' nožište visine iz C na $\overline{AB}$. Tada je je $\angle CC'A = \angle ACB = 90°$, pa su trokuti $\triangle ACC'$ i $\triangle ABC$ slični po K-K poučku. Iz te sličnosti slijedi:

$$\frac{v}{b} = \frac{a}{c} \implies v = \frac{ab}{c}.$$

Drugo rješenje.
Izrazimo površinu trokuta $\triangle ABC$ na dva načina: $P = \dfrac{cv}{2}$ i $\dfrac{ab}{2}$. Izjednačavanjem dvaju izraza dobivamo:

$$\frac{cv}{2} = \frac{ab}{2} \implies v = \frac{ab}{c}.$$

Zadatak 3.
Dokažite da u pravokutnom trokutu vrijedi: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{v^2}$.

Rješenje.
Iz relacije $2P = ab = cv$ slijedi $v = \dfrac{ab}{c} \implies v^2 = \dfrac{a^2b^2}{c^2} \implies \dfrac{1}{v^2} = \dfrac{c^2}{a^2b^2}$. Uvrstimo $a^2 + b^2 = c^2$:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Zadatak 4.
Dokažite da u pravokutnom trokutu vrijedi $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Rješenje.
Neka je I središte upisane kružnice i neka su D, E, F dirališta upisane kružnice sa stranicama BC, CA i AB redom. Primijetimo da su D, E i F nožišta visina iz I u trokutima $\triangle BCI$, $\triangle CAI$ i $\triangle ABI$ redom. Sada dobivamo:

$$\begin{aligned}
P &= P_{BCI} + P_{CAI} + P_{ABI} \\
\frac{ab}{2} &= \frac{DI \cdot BC}{2} + \frac{EI \cdot CA}{2} + \frac{FI \cdot AB}{2} \\
ab &= r(a+b+c) \\
r &= \frac{ab}{a+b+c} \\
r &= \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} \\
r &= \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2 - c^2} \\
r &= \frac{ab(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2} \\
r &= \frac{ab(a+b-c)}{2ab} \\
r &= \frac{a+b-c}{2}
\end{aligned}$$

Zadatak 5.
Neka je u pravokutnom trokutu D nožište visine iz vrha C. Neka su r_1 i r_2 polumjeri upisanih kružnica trokuta $\triangle ADC$ i $\triangle BDC$ redom. Dokažite da vrijedi:

a) $r + r_1 + r_2 = v$.

b) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Rješenje.

a) Iz prethodnog zadatka slijedi $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. Slično dobivamo $r_1 = \dfrac{AD+v-b}{2}$ i $r_2 = \dfrac{BD+v-a}{2}$. Zbrajanjem dobivamo:
$$r + r_1 + r_2 = \frac{a+b-c+AD+v-b+BD+v-a}{2} = \frac{AD+BD-c+2v}{2} = v.$$

b) Lako dobivamo $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ i $\triangle CBD \sim \triangle ABC$. Is sličnosti slijedi:
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{b}{c} \implies r_1 = r \cdot \dfrac{b}{c} \implies r_1^2 = r^2 \cdot \dfrac{b^2}{c^2} \\ \dfrac{r_2}{r} = \dfrac{a}{c} \implies r_2 = r \cdot \dfrac{a}{c} \implies r_2^2 = r^2 \cdot \dfrac{a^2}{c^2} \end{array}\right\} \implies r_1^2 + r_2^2 = r^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{c^2} = r^2.$$

Zadatak 6.
Neka je u pravokutnom trokutu M polovište visine $\overline{CD}$ na hipotenuzu, a točka N polovište dužine $\overline{AD}$. Dokažite da je $BM \perp CN$.

Rješenje.
Prema konstrukciji je dužina $\overline{MN}$ srednjica trokuta ADC, pa je $MN \parallel AC$. Zbog $AC \perp BC$ i $MN \perp AC$ vrijedi $MN \perp BC$. Dakle, u trokutu BNC visine $\overline{CD}$ i $\overline{MN}$ sijeku se u točki M pa je M ortocentar ovoga trokuta. Zbog toga je u trokutu BNC pravac BM treća visina pa je $BM \perp CN$.

Zadatak 7.
Ako je $n > 2$ prirodan broj, dokažite da u pravokutnom trokutu vrijedi
$$a^n + b^n < c^n.$$

Rješenje.
Zbog $a < c$, $b < c$ i $a^2 + b^2 = c^2$, za $n \in N$, $n > 2$ vrijedi:
$$a^n + b^n = a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} < a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} = (a^2+b^2)c^{n-2} = c^2 c^{n-2} = c^n.$$

Zadatak 8.
Dokažite da u pravokutnom trokutu vrijedi
$$c + v > a + b.$$

Rješenje.
Zbog $c > a$ i $c > b$ vrijedi $c - a > 0$ i $c - b > 0$. Zato je $(c-a)(c-b) > 0 \iff c^2 + ab > c(a+b)$. Odatle nakon dijeljenja s $c > 0$, dobivamo $c + \dfrac{ab}{c} > a + b \iff c + v > a + b$.