MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Trigonometrija u geometriji

7. listopada 2017.

Često nas geometrijski zadatak traži da nađemo veličinu nekog kuta, duljinu dužine ili dokažemo neku jednakost. Upravo se u takvim zadatcima, kao i mnogim drugim, korisna pokazala trigonometrija. Zadatke rješavamo tako da tvrdnje zadatka svedemo na algebarske jednakosti i dalje nastavimo s algebarskim manipulacijama trigonometrijskim izrazima. U ovome predavanju navest ćemo formule i teoreme koji se najčešće koriste, zatim proći kroz nekoliko primjera, a na kraju su zadatci za vježbu. Za razumijevanje materijala potrebno je osnovno poznavanje geometrije i trigonometrije.

Formule

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\
\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \\
\operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha \\
\cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\
\operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} \\
\operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$
$$\cos(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

Formule za površinu trokuta ABC:

$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ca\sin\beta}{2}$$
$$P = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$$

Teoremi

Teorem 1 (Sinusov poučak). *U trokutu ABC vrijedi:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Teorem 2 (Kosinusov poučak). *U trokutu ABC vrijedi:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

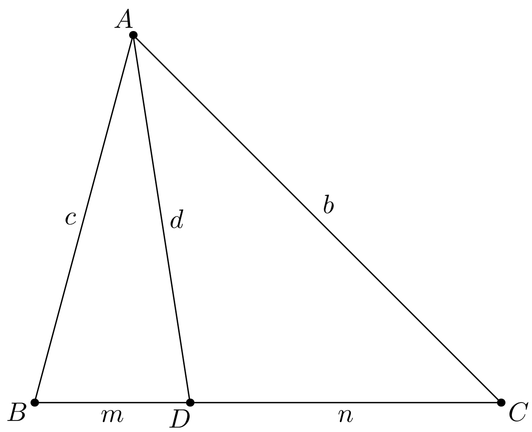
Teorem 3 (Trigonometrijska forma Cevinog teorema). *Neka je ABC trokut i neka su D, E, F točke na pravcima BC, CA, AB redom. Tada su pravci AD, BE i CF konkurentni ako i samo ako:*

$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC} \cdot \frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle EBA} \cdot \frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle FCB} = 1$$

Primjeri

Primjer 1 (Stewartov teorem). *Neka je ABC trokut i neka je D točka na $\overline{BC}$. Označimo $d = AD$, $m = BD$ i $n = CD$. Tada vrijedi:*

$$a(d^2 + mn) = b^2m + c^2n$$



Dokaz. Iz kosinusovog poučka u trokutima ABD i ACD dobivamo:

$$\cos(\angle ADB) = \frac{d^2 + m^2 - c^2}{2dm}$$

$$\cos(\angle ADC) = \frac{d^2 + n^2 - b^2}{2dn}$$

Kombiniranjem te dvije jednakosti dobivamo:

$$\frac{d^2 + m^2 - c^2}{2dm} = \cos(\angle ADB) = \cos(180^\circ - \angle ADC) = -\cos(\angle ADC) = -\frac{d^2 + n^2 - b^2}{2dn}$$

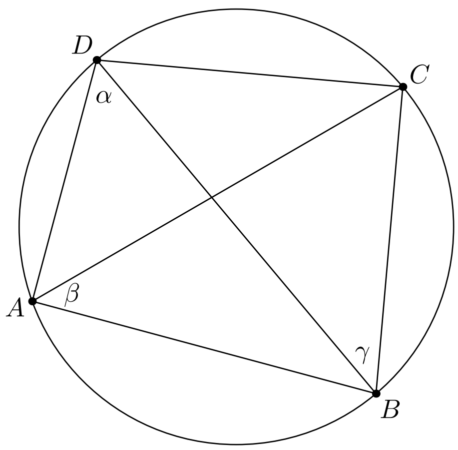
$$n(d^2 + m^2 - c^2) = -m(d^2 + n^2 - b^2)$$

$$(m + n)d^2 + (m + n)mn = b^2 m + c^2 n$$

$$a(d^2 + mn) = b^2 m + c^2 n$$

Primjer 2 (Ptolomejev teorem). *Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Tada vrijedi:*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$



Dokaz. Označimo obodne kuteve nad AB, BC, CD sa α, β i γ i označimo sa R polumjer opisane kružnice. Tada vrijedi: $AB = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\beta$, $CD = 2R\sin\gamma$, $AD = 2R\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ $AC = 2R\sin(\alpha + \beta)$ $BD = 2R\sin(\beta + \gamma)$. Tvrdnja teorema je nakon dijeljenja s $2R$ ekvivalentna s jednakosti:

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

Primjenom formula za $\sin(x \pm y)$ i $\cos(x \mp y)$ dobivamo da su lijeva i desna strana jednake:

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\beta\cos\gamma + \sin\alpha\cos^2\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin^2\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma$$

Zadatci

Zadatak 1.

U trokutu sa stranicama a,b,c i površinom P vrijedi jednakost $\sqrt{3}(b^2 + c^2 - a^2) = 2bc - 4P$. Odredi veličinu kuta nasuprot stranice a.

Rješenje.
Kako je $P = \frac{1}{2}bc$ i iz kosinusovog poučka vrijedi $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$,
$\sqrt{3}(b^2 + c^2 - a^2) = 2bc - P \iff \sqrt{3}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 1 - \frac{2bc\sin\alpha}{2bc} \iff \sqrt{3}\cos\alpha = 1 - \sin\alpha \iff \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}$ $\iff \sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha = \frac{1}{2} \iff \sin\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \iff \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$

Zadatak 2.

Ako za kutove trokuta vrijedi $\sin^2\gamma = \sin^2\beta + \sin^2\alpha$ dokaži da je trokut pravokutan.

Rješenje.
Iz sinusovog poučka imamo $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ *odakle dobivamo* $\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \sin\beta = \frac{b}{2R}, \sin\gamma = \frac{c}{2R}$.
Uvrštavanjem dobivenog u početnu jednakost dobivamo $\frac{c^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} \iff c^2 = a^2 + b^2 \iff$ *trokut je pravokutan*

Zadatak 3.

Točka M je središte stranice AB trokuta ABC. Dokažite da je umnožak duljina dužina radijusa kružnice opisane trokutu AMC i visine iz M na AC jednak umnošku radijusa kružnice opisane trokutu BMC i visine iz M na BC.

Rješenje.
Neka su r_1 i r_2 radijusi kružnica opisanih trokutima AMC i BMC. Neka je $\angle CAB = \alpha$ i $\angle ABC = \beta$. Iz sinusovog poučka $r_1 = \frac{|CM|}{2\sin\alpha}, r_2 = \frac{|CM|}{2\sin\beta}$ *Neka su U i V redom nožišta visina iz M na AC i BC redom. Tada iz pravokutnih trokuta AMU i MBV imamo* $|MU| = |AM|\sin\alpha = \frac{|AB|}{2}\sin\alpha$, $|MV| = |MB|\sin\beta = \frac{|AB|}{2}\sin\beta$. *Koristeći gornje jednakosti dobivamo*

$$r_1 \cdot |MU| = \frac{|CM|}{2\sin\alpha}\frac{|AB|}{2}\sin\alpha = \frac{|CM|\cdot|AM|}{4}$$
$$r_2 \cdot |MV| = \frac{|CM|}{2\sin\beta}\frac{|AB|}{2}\sin\beta = \frac{|CM|\cdot|AM|}{4}$$

Zadatak 4.

Simetrala kuta kod vrha A trokuta ABC siječe stranicu BC u točki D. $\angle ADB = 45^\circ$ i $CD \cdot BD = AD^2$. Odredi veličinu kuta $\angle BAC$.

Rješenje.
Neka je $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ i $\angle CBA = \gamma$. Primjenom sinusovog poučka na trokute ADB i ACD dobivamo

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\frac{\alpha}{2}} \implies AD = \frac{BC\cdot\sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$\frac{AD}{\sin\gamma} = \frac{CD}{\sin\frac{\alpha}{2}} \implies AD = \frac{CD\cdot\sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

odavde imamo

$$AD^2 = BD\cdot CD\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

što zbog uvjeta $CD\cdot BD = AD^2$ implicira

$$\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 1 \iff \sin\beta\cdot\sin\gamma = \sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

Iz adicijskih formula vrijedi

$$\sin\beta\cdot\sin\gamma = \frac{\cos(\beta-\alpha) - \cos(\beta+\alpha)}{2} \tag{2}$$

i

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

odnosno

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \iff \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha - 1}{2} \tag{3}$$

Iz trokuta DBA imamo

$$45^\circ + \beta + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ$$

a iz trokuta ABC

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$
$$45^\circ + \beta + \frac{180^\circ - \beta - \gamma}{2} = 180^\circ$$

iz ove jednakosti dobivamo $\beta - \gamma = 90^\circ$ Iz (1),(2) i (3)

$$\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) = 1 - \cos\alpha$$
$$\cos(\beta+\gamma) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

pa dobijemo

$$\cos(\beta-\gamma) + \cos\alpha = 1 - \cos\alpha$$

odakle slijedi

$$2\cos\alpha = 1 - \cos(\beta-\gamma) = 1 - \cos 90^\circ = 1 \implies 2\cos\alpha = 1 \implies \alpha = 60^\circ$$

Zadatak 5.
Zadan je trokut ABC. Točke A', B' i C' su preslike točki B, C i A preko A, B i C redom. Dokaži da je površina trokuta $A'B'C'$ sedam puta veća od površine trokuta ABC.

Rješenje.
Kako je

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\alpha = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin\beta = \frac{1}{2}AC \cdot BC \sin\gamma$$

i

$$AC = CC', BC = BB', AA' = AB$$

to je

$$P_{\triangle A'AC'} = \frac{1}{2}AA' \cdot AC' \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}AB \cdot 2AC \sin\alpha = 2P_{\triangle ABC}$$
$$P_{\triangle A'BB'} = \frac{1}{2}A'B \cdot BB' \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2}2AB \cdot BC \sin\alpha = 2P_{\triangle ABC}$$
$$P_{\triangle B'CC'} = \frac{1}{2}B'C \cdot CC' \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2}2BC \cdot AC \sin\alpha = 2P_{\triangle ABC}$$

Zbog toga je

$$P_{\triangle A'B'C'} = P_{\triangle ABC} + P_{\triangle A'AC'} + P_{\triangle A'BB'} + P_{\triangle B'CC'} = 7P_{\triangle ABC}$$

Zadatak 6.
Neka je ABC trokut i P točka. Preslika pravca AP preko simetrale kuta $\angle BAC$ siječe BC u D. Analogno definiramo E i F. Dokaži da su pravci AD, BE i CF konkurentni.

Rješenje.
Pravci AP, BP i CP su konkurentni u P, pa iz trigonometrijske forme Cevinog poučka slijedi:

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC} \cdot \frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA} \cdot \frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle PCB} = 1 \tag{1}$$

Kako su pravci AB i AC simetrični s obzirom na simetralu kuta $\angle BAC$, vrijedi $\angle BAP = \angle DAC$ i $\angle PAC = \angle BAD$. Analogno zaključujemo za ostale kuteve. Sada iz (1) i dobivenih jednakosti dobivamo:

$$\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD} \cdot \frac{\sin\angle EBA}{\sin\angle CBE} \cdot \frac{\sin\angle FCB}{\sin\angle ACF} = 1$$

Sada iz trigonometrijske forme Cevinog poučka slijedi da su pravci AD, BE i CF konkurentni.

Zadatak 7.
Dan je pravokutnik $ABCD$. Na stranici BC je točka E za koju vrijedi $EC = 4BE$, a na stranici CD je točka F za koju vrijedi $FD = 4CF$. Nađi omjer $AB : BC$ uz uvjet da je kut $\angle EAF$ maksimalan.

Rješenje.
Neka je $\angle EAB = \alpha$, $\angle EAF = \varphi$, $\angle FAD = \beta$. Neka je $AB = x$ i $BC = 1$. Iz uvjeta da je kut φ maksimalan slijedi da je kut $\alpha + \beta$ minimalan. Iz pravokutnih trokuta ABE i ADF slijedi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5x} \quad i \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{4x}{5}$$

Zatim je:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{5x} + \frac{4x}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{x} + 4x$$

Vrijedi: $\frac{1}{x} + 4x \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot 4x}$, odnosno $\frac{1}{x} + 4x \geqslant 4$, odnosno $4x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$, pa je $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, odnosno $\alpha + \beta$ minimalan za $x = \frac{1}{2}$. Traženi omjer je $AB : BC = x : 1 = \frac{1}{2}$.

Zadatak 8.
Ako za kuteve α i β trokuta vrijedi:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$$

tada je trokut jednakokračan ili pravokutan. Dokaži!

Rješenje.
Zbog $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} > 0$ *su kutevi* α *i* β *šiljasti, tj.*

$$\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \tag{1}$$

Vrijedi:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

tj.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) = 0 \tag{2}$$

Zbog (1) *je* $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \neq 0$, *pa iz* (2) *slijedi* $\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta$, *tj.* $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. *Ova jednakost je moguća ili kad je* $2\alpha = 2\beta$, *tj. trokut je jednakokračan, ili kad je* $\pi - 2\alpha = 2\beta$, *tj.* $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *(pravokutan trokut).*

Zadatak 9.
Dan je trokut ABC *u kome je* $\angle CAB = 15^\circ$ *i* $\angle ABC = 30^\circ$. *Sa* M *označimo polovište stranice* AB.

a) Dokaži da je $\angle ACM = 30^\circ$.

b) Dokaži da je

$$CM = \frac{AB \cdot BC}{2AC}$$

Rješenje. *a) Neka je* $\angle ACM = \varphi$ *i* $\angle BCM = \theta$. *Tada je*

$$\varphi + \theta = \angle ACB = 135^\circ$$

Primjenom sinusovog poučka na tokute BMC *i* AMC *i koristeći* $MB = MA$ *imamo*

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin\theta} = \frac{CM}{MB} = \frac{CM}{MA} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin\varphi}$$

odakle je

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = 2\cos 15^\circ$$

Također imamo

$$\sin\theta = \sin(135^\circ - \varphi) = \sin 135^\circ\cos\varphi - \cos 135^\circ\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

pa je

$$2\cos 15^\circ = \frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

a iz posljednje jednakosti lagano nalazimo

$$\cot\varphi = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ - 1$$

Izračunajmo sada $\cos 15^\circ$.
Imamo

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos^2 15^\circ - (1 - \cos^2 15^\circ) = 2\cos^2 15^\circ - 1$$

pa je

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{8}$$

a kako je $\cos 15^\circ > 0$ *to iz posljednje jednakosti imamo*

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{8}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

pa je

$$\operatorname{ctg}\varphi = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ - 1 = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$$

a kako je $\varphi \in (0, 135^\circ)$ *to mora biti* $\varphi = 30^\circ$.

b) Dovoljno je dokazati da je

$$\frac{CM}{BC} = \frac{AM}{2AC}$$

Kut CMB *je vanjski ugao trokuta* ACM *i imamo*

$$\angle CMB = \angle CAM + \angle ACM = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$$

pa primjenom sinusovog poučka na trokut CMB dobivamo

$$\frac{CM}{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Primjenom sinusovog poučka na trokut ABC dobivamo

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}$$

pa je

$$\frac{AB}{2AC} = \frac{\sin 45^\circ}{2\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CM}{BC}$$

te je ovim dokaz završen.