Kompleksni Brojevi

14. listopada 2017.

Dodavajući skupu racionalnih brojeva sve iracionalne brojeve, dobit ćemo skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Pri tome u skupu $\mathbb{R}$ vrijede sva svojstva računskih operacija koja su vrijedila i u skupu $\mathbb{Q}$. Jednadžba $x^2 = 2$ ima rješenja $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$ u skupu $\mathbb{R}$, ali njoj vrlo slična jednadžba $x^2 = -2$ **nema rješenja u skupi** $\mathbb{R}$. Razlog je što za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x^2 \geq 0$. Došli smo u situaciju da se pomirimo s time da jednostavne jednadžbe kao što su $x^2 = -1$, $x^2 = -3$, ... nemaju rješenja ili da, kao u prethodnim analognim situacijama, proširimo skup $\mathbb{R}$ do takvog skupa u kojem će navedene jednadžbe imati rješenja.

Neka je **i** zamišljeno rješenje jednadžbe $x^2 = -1$; dakle. Broj i se zove **imaginarna jedinica** i ima osnovnu ulogu u opisivanju našeg novog skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ koji će biti proširenje skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Želimo da u našem novom skupu budu definirane algebarske operacije zbrajanja i množenja. Zbog toga je umnožak bilo kojeg **realnog broja y i imaginarne jedinice** i kompleksan broj. Takve brojeve nazivamo posebnim imenom: imaginarni brojevi.

Kompleksni broj je zbroj realnog i imaginarnog broja. Svaki je realan broj i kompleksan broj jer se može zapisati u obliku $x + 0 \cdot i$. Svaki je imaginarni broj i kompleksan jer se može zapisati u obliku $0 + yi$. Kompleksni broj z je oblika $z = x + yi$, gdje su x i y realni brojevi. Takav zapis zovemo algebarski (ili standardni) prikaz kompleksnog broja z. Broj x nazivamo realni dio, a y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Skup kompleksnih brojeva označavamo s $C = \{x + yi \colon x, y \in R\}$.

Zadatak 1. *U skupu kompleksnih brojeva riješi jednadžbu*

$$z(4+i) + \overline{z}(2-3i) = 1 - i^{11}$$

Zadatak 2. *Odredi sve korjene polinoma*

$$P(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i$$

Ako znamo da je jedan of njih realan.

Rješenje.. Kako znamo da je jedan od korjena polinoma realan, označimo ga s x_1 i uvrstimo u polinom. Dobivamo:

$$P(x_1) = 2x_1^3 - (5+6i)x_1^2 + 9x_1 i + 1 - 3i$$

Promatranjem imaginarnog dijela vidimo:

$$\begin{aligned} 0 &= -6x_1^2 + 9x_1 - 3 \\ \iff 0 &= -2x_1^2 + 3x_1 - 1 \end{aligned}$$

Sada rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo:

$$x_1 = 1 \quad \text{ili} \quad x_1 = \frac{1}{2}$$

Uvrštavanjem obje mogućnosti u P dobivamo da $P(\frac{1}{2})$ ima realan dio 0, dok to ne vrijedi za $P(1)$. Dakle, jedna nultočka je $x_1 = \frac{1}{2}$. Sada možemo podjeliti čitav polinom s tom nultočkom i dobiti:

$$Q(x) = \left(2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i\right) : \left(z - \frac{1}{2}\right) = 2z^2 - (4+6i)z - 2 + 6i$$

Sada možemo rješiti kvadratnu jednadžbu $Q(x) = 0$ i dobiti preostala rješenja, konkretno:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 + 2i \\ x_3 &= 1 + i \end{aligned}$$

✓

Zadatak 3. *Odredite apsolutnu vrijednost kompleksnog broja z za koji vrijedi*

$$\frac{\overline{z}}{1+2i} - \frac{2z}{1-2i} = 5$$

Zadatak 4. *Odredite kompleksni broj z za koji vrijedi*

$$|z+2| = |1 - \overline{z}| \quad i \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+3i}\right) = \frac{1}{13}$$

Zadatak 5. *U kompleksnoj ravini prikaži skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi*

$$\left|z - (1-i)^4\right| < \left|\sqrt{3} - i\right|^2$$

Zadatak 6. *Za koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$i^1 + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + ni^n = 48 + 49i$$

Zadatak 7. *Među kompleksnim brojevima koji zadovoljavaju $|z - 4 - 4i| = \sqrt{2}$ odredite onaj koji ima najmanju i onaj koji ima najveću apsolutnu vrijednost.*

Zadatak 8. *Odredite sve kompleksne brojeve takve da*

$$z^3 = \overline{z}$$

Zadatak 9. *Koliko ima kompleksnih brojeva $z = a + bi$ za koje vrijedi*

$$\begin{aligned} a, b &\in \mathbb{Z} \\ ab &\geq 0 \\ \frac{|z| - 16}{1 - |z|} &\geq 2 \end{aligned}$$

Zadatak 10. *Odredite realni parametar k tako da sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{2}i\right)\right]^2 &= |z+2|^2 + \frac{5}{4} \\ \operatorname{Im} z - 2\operatorname{Re} z &= k \end{aligned}$$

ima samo jedno rješenje u kompleksnim brojevima.

Zadatak 11. *Kompleksni brojevi* z_1, z_2, z_3 *pridruženi su točkama kompleksne ravninve* A, B, C *koje su od ishodišta udaljene za* 2016*. Ako za kompleksne brojeve* z_1, z_2, z_3 *vrijedi* $z_1 + z_2 + z_3 = 0$*, izračunaj stranice trokuta* ABC*.*

Zadatak 12. *Ako je* $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ *izračunajte zbroj*

$$1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{2006}$$

Zadatak 13. *Za kompleksen brojeve* z *i* w *vrijedi* $|z| = |w| = |z - w|$*. Izračunaj* $\left(\frac{z}{w}\right)^{99}$*.*

Zadatak 14. *Jednadžba*

$$z^6 + z^3 + 1 = 0$$

ima kompleksnu nultočku sa argumentom između 90 *i* 180 *stupnjeva. Odredi argument te kompleksne nultočke.*

Zadatak 15. *Odredi površinu područja kompleksne ravnine takvog da i* $\frac{z}{40}$ *i* $\frac{40}{z}$ *imaju i realni i imaginarni dio između* 0 *i* 1*.*