Kvadratna Jednadžba

11. studenoga 2017.

Teorijske osnove

Kvadratna jednadžba je polinom oblika $ax^2 + bx + c$ sa $a \neq 0$. Nultočke (rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$) su oblika $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Dokaz:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$
$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Postoje mnogi problemi vezani uz pronalazak nultočki kvadratne jednadžbe ali gore navedena formula nije uvijek najbolji pristup. Neke druge tehnike rješavanja uključuju:

1. Vieteove formule: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ gdje su x_1, x_2 nultočke. Tada vrijedi: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Zadatak 1.
Riješite sustav jednadžbi:

$$x + y = 12, \quad xy = 35$$

Rješenje.
U rješenju ovoga primjera koristit ćemo se Vieteovim formulama. Znamo da je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ pa je $-\frac{b}{a} = 12$, $\frac{c}{a} = 35$, tj. imamo kvadratnu jednadžbu oblika $x^2 - 12x + 35 = 0$.
Sada:

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$
$$x^2 - 5x - 7x + 35 = 0$$
$$x(x - 5) - 7(x - 5) = 0$$
$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

Rješenja su: $x_1 = 7$, $x_2 = 5$

2. Diskriminanta: Diskriminanta jednadžbe ax^2+bx+c je $D = b^2-4ac$. Ako je diskriminanta $D > 0$ rješenja su realna i različita, ako je $D = 0$ rješenje je realno i dvostruko, ako je $D < 0$ rješenja su kompleksno-konjugirana tj. rješenja su kompleksni broj $z = x + yi$ i taj broj konjugiran $\bar{z} = x - yi$.

   Zadatak 2.
   Postoje dvije vrijednosti za a takve da jednadžba $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ ima samo jedno rješenje za x. Kolika je suma vrijednosti za a?

   Rješenje.
   Jednadžba ima jedinstvenu nultočku za $D = 0$ tj. $b^2 - 4ac = 0$, pa uvrštavanjem dobivamo:

$$(a + 8)^2 - 4 * 4 * 9 = 0$$
$$a^2 + 16a + 64 - 144 = 0$$
$$a^2 + 16a - 80 = 0$$
$$a^2 + 20a - 4a - 80 = 0$$
$$a(a + 20) - 4(a + 20) = 0$$
$$(a - 4)(a + 20) = 0$$

   Dobijemo da su rješenja jednadžbe $a_1 = 4, \quad a_2 = -20$ tj. njihova suma $a_1 + a_2 = 4 - 20 = -16$.

3. Graf: Graf kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c$ je parabola koja je otvorena prema gore ako je $a > 0$ ili prema dolje ako je $a < 0$. Graf će sijeći x-os ako ima dvije realne nultočke, dodirivati x-os ako ima jednu realnu nultočku i ju neće sijeći ako ima kompleksne nultočke. Graf ima vertikalnu os simetrije $x = -\frac{b}{2a}$. Tjeme se nalazi u točki T$(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$.

   Zadatak 3.
   Za brojeve a, b, c znamo da je $(a + b + c)c < 0$. Dokaži da je $b^2 > 4ac$.

   Rješenje.
   Promotrimo kvadratnu jednadžbu $f(x) = ax^2 + bx + c$. Uvrštavanjem točaka 0 i 1 dobivamo $f(0) = c$ i $f(1) = a + b + c$.
   Sada znamo da je dana nejednakost $(a + b + c)c < 0$ zapravo $f(0)f(1) < 0$, što znači da su brojevi $f(0)$ i $f(1)$ suprotnog predznaka. Pošto f poprima i pozitivne i negativne vrijednosti (u točkama 0 i 1), poprima i vrijednost 0. (Nacrtajte si to!)
   Drugim riječima, kvadratna funkcija f ima nultočku, što znači da joj je diskriminanta D pozitivna. (Inače rješenja kvadratne jednadžbe $f(x) = 0$ nisu realna.) To implicira $b^2 - 4ac > 0$, što je i trebalo pokazati.

Zadatci

Zadatak 4.
Riješite jednadžbu $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) + (x^2 + 5x + 6) = 0$.

Zadatak 5.
Riješite sustav jednadžbi:

$$x^2 + 6xy + y^2 = 41, \quad x + y = 5$$

Zadatak 6.
Neka kvadratni polinom $ax^2 + bx + c$ ima pozitivne koeficijente a, b, c koji tvore aritmetički niz tim redoslijedom. Ako su x_1 i x_2 nultočke tog polinoma, čemu je jednak $x_1 + x_1x_2 + x_2$?

Zadatak 7.
Za brojeve a, b, c znamo da je $(a - b + c)c < 0$. Dokaži da je $b^2 > 4ac$.

Zadatak 8.
Pretpostavimo da jednadžba $x^2 + x + c$, pri čemu je $c \neq \frac{1}{4}$ ima realna rješenja. Dokažite da je tada točno jedno rješenje veće od $-\frac{1}{2}$.

Zadatak 9.
Neka su a,b,c prirodni brojevi takvi da jednadžba $ax^2 + bx + c$ ima racionalna rješenja. Dokaži da barem jedan od brojeva a, b, c mora biti paran.

Zadatak 10.
Ako su korijeni jednadžbe $x^2 + ax + 1 = b$ cijeli brojevi, dokažite da je $a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$.

Zadatak 11.
Pretpostavi da su a, b, c tri realna broja takva da kvadratna jednadžba $x^2-(a+b+c)x+(ab+bc+ca) = 0$ ima nultočke oblika $\alpha \pm i\beta$ gdje $\alpha > 0$ i $\beta \neq 0$ su realni brojevi. $(i = \sqrt{-1})$ Dokaži da:

1. brojevi a, b, c su pozitivni.
2. brojevi $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ tvore stranice trokuta.

Hint: Razmislite koja nejednakost mora biti ispunjena da bi nešto tvorilo trokut.

Zadatak 12.
Neka je $x^2 + b_1x + c_1$ kvadratna jednadžba sa nultočkama x_{11} i x_{12}, te $x^2 + b_2x + c_2$ kvadratna jednadžba sa nultočkama x_{21} i x_{22} gdje je x_{11}=x_{21}. Pronadi kvadratnu jednadžbu koja prolazi točkama x_{12} i x_{22}.

Zadatak 13.
Neka su a,b,c realni brojevi takvi da za svake dvije od jednadžbi

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

postoji točno jedan realni broj koji zadovoljava obje. Odredi sve moguće vrijednosti za $a^2+b^2+c^2$.

Zadatak 14.
U Kartezijevom koordinatnom sustavu, neka su G_1 i G_2 grafovi kvadratnih funkcija $f_1(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ i $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, gdje je $a_1 > 0 > a_2$. Grafovi G_1 i G_2 sijeku se u točkama A i B. Četiri tangente na G_1 i G_2 u točkama A i B formiraju konveksni četverokut u koji je upisana kružnica. Dokaži da grafovi G_1 i G_2 imaju istu os simetrije.

Rješenja

Rješenje zadatka 4. U rješenju ovoga zadatka koristimo se faktorizacijom:

$$(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)+(x^2+5x+6)=0$$

$$(x^2+x+2x+2)(x^2+3x+4x+12)+(x^2+2x+3x+6)=0$$
$$[x(x+1)+2(x+1)][x(x+3)+4(x+3)]+[x(x+2)+3(x+2)]=0$$
$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+(x+2)(x+3)=0$$
$$(x+2)(x+3)[(x+1)(x+4)+1]=0$$
$$(x+2)(x+3)(x^2+5x+5)=0$$

Rješenja su: $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_3=-2$, $x_4=-3$

Rješenje zadatka 5. Zadatak se rješava na isti način kao i zadatak 1. $x^2+6xy+y^2=41$ svodimo na $(x^2+2xy+y^2)+4xy=41$ tj. $(x+y)^2+4xy=41$. Iz ovoga izraza dobijemo da je $xy=4$ jer znamo da je $x+y=5$, te iz toga napravimo kvadratnu jednadžbu čije su nultočke rješenja zadatka.

Rješenje zadatka 6. Ako su a, b, c članovi aritemtičkog niza, $b=a+d$, $c=a+2d$, gdje je d diferencija niza (diferencija niza je razlika n-tog i n-1 člana). Kako je kvadratna jednadžba jednaka ax^2+bx+c znamo da je $x_1+x_1x_2+x_2=-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$.

$$x_1+x_1x_2+x_2=\frac{c-b}{a}=\frac{a+2d-a-d}{a}=\frac{d}{a}$$

pogledat kako se pravi prijelaz u novi red nad jednako, da to lipo lici

Rješenje zadatka 7. Sagledajmo kvadratnu jednadžbu $f(x)=ax^2+bx+c$. $f(x)$ u točki 0 postaje $f(0)=c$, a u točki -1 postaje $f(-1)=a-b+c$. Sada znamo da je dana nejednakost $(a-b+c)c<0$ zapravo $f(0)f(-1)<0$ što znači da između f(0) i f(-1) postoji nultočka, pa je D>0 tj. $b^2>4ac$.

Rješenje zadatka 8. Zato što kvadratna jednadžba ima realna rješenja, znamo da je D>0, tj. $b^2-4ac>0$. Uvrštavamo a i b, te dobijemo $c<\frac{1}{4}$. Tvrdimo da je $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4c}}{2}$ veći od $-\frac{1}{2}$, te dobijemo izraz $\pm\sqrt{1-4c}>0$, i to rastavimo na 2 slučaja.
1. slučaj: $\sqrt{1-4c}>0$ tj. $c<\frac{1}{4}$ što znači da je barem jedno rješenje uvijek veće od $-\frac{1}{2}$.
2. slučaj: $-\sqrt{1-4c}>0$ tj. $c>\frac{1}{4}$ što znači da zbog uvjeta diskriminante, drugo rješenje nije veće od $\frac{1}{2}$.
Tada zaključujemo da za $c<\frac{1}{4}$ postoji točno jedno rješenje manje od $-\frac{1}{2}$.

Rješenje zadatka 9. Ako je $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su $x_{1,2}$ racionalni brojevi, onda su a ili b ili c parni brojevi.
Pretpostavimo suprotno tj. da su a, b, c neparni brojevi.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{Q}$$

$$b^2 - 4ac = k^2, k \in \mathbb{Q}$$

Zato što su a, b, c neparni brojevi, tada i k mora biti neparan broj.

$$b^2 - 4ac = k^2$$

$$b^2 - k^2 = 4ac$$

$$(b - k)(b + k) = 4ac$$

$$(2p - 1 - 2q + 1)(2p - 1 + 2q - 1) = 4ac$$

$$2(p - q)(2(p + q) - 2) = 4ac$$

$$4(p - q)(p + q) - 4(p - q) = 4ac$$

$$(p - q)(p + q) - (p - q) = ac$$

Zbroj ili razlika 2 cijela broja je paran broj dok je umnožak 2 neparna broja neparan broj. $\Rightarrow\Leftarrow$
Zaključujemo da je barem jedan od brojeva a,b,c paran broj.

Rješenje zadatka 10.

$$x^2 + ax + 1 - b = 0$$

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$a = -(x_1 + x_2)$$

Zbroj dva cijela broja je cijeli broj, pa je a cijeli broj.

$$x_1 x_2 = 1 - b$$

$$b = 1 - x_1 x_2$$

Razlika i umnožak dva cijela broja je cijeli broj, pa je i b cijeli broj.

Znamo da je kvadriran cijeli broj a^2 pozitivan tj. ulazi u skup prirodnih brojeva, isto kao i b^2, a zbroj 2 prirodna broja je prirodan broj.

Rješenje zadatka 11. a.)

$$x^2 - (a + b + c)x + (ab + bc + ac) = 0$$

$$x_{1,2} = \alpha + i\beta, \alpha > 0, \beta \neq 0$$

$$D < 0$$

$$(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ac) < 0$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac-4ab-4ac-4bc<0$$
$$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac<0$$
$$x_1+x_2=a+b+c=2\alpha$$
$$a+b+c>0$$

Pretpostavljamo suprotno tj. B.S.O. 1. slučaj c<0, a,b>0, 2. slučaj c>0, a,b<0.
1. slučaj:

$$(a-b)^2+c^2-2c(a+b)<0 \Rightarrow\Leftarrow$$

2. slučaj:

$$(a-b)^2+c^2(a+b)c<0 \Rightarrow\Leftarrow$$

a ili b ili c ne mogu biti manji od 0 jer je a+b+c>0, stoga su a,b,c>0.

b.) Pretpostavimo suprotno tj. B.S.O

$$\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}+\sqrt{c}$$
$$a \geqslant b+2\sqrt{bc}+c$$
$$a-b-c \geqslant 2\sqrt{bc}$$
$$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac \geqslant 2bc>0$$
$$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac \geqslant 0 \Rightarrow\Leftarrow D<0$$

Iz toga proizlazi:

$$\sqrt{a}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$$
$$\sqrt{b}<\sqrt{a}+\sqrt{c}$$
$$\sqrt{c}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Zadovoljene su nejednakosti trokuta što znaci da su $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ stranice trokuta.

Rješenje zadatka 12.

$$x^2+b_1x+c_1=0, \quad x^2+b_2x+c_2=0$$

Uzmimo α za zajedničku nultočku dvije kvadratne jednadžbe.

$$\alpha^2+b_1\alpha+c_1-(\alpha^2+b_2\alpha+c_2)=0-0=0$$
$$\alpha(b_1-b_2)=c_2-c_1$$
$$\alpha=\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2}$$

Neka su α i β nultočke prve, a α i γ nultočke druge jednadžbe.

$$\alpha+\beta=-b_1, \quad \alpha+\gamma=-b_2$$
$$\beta=-b_1-\alpha, \quad \gamma=-b_2-\alpha$$
$$f(x)=(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$f(x)=x^2+(b_1+b_2+2\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2})x+(-b_1-\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2})(-b_2-\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2})$$

Rješenje zadatka 13. Uzmimo proizvoljne dvije jednadzbe f_1 i f_2. Znamo da je $D_1 > 0$ i $D_2 > 0$, te da je $f_1 - f_2 = (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2)$ tj. $(b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) < 0$. Raspišemo li taj izraz dobit ćemo da je $2b_1b_2 - 4a_1c_2 - 4a_2c_1 > D_1 + D_2$. Sada uvodimo novu funkciju $f_3 = f_1 + f_2$ i njena diskriminanta izgleda kao $(b_1+b_2)^2+4(a_1+a_2)(c_1+c_2) = D_1+D_2+2b_1b_2-4a_1c_2-4a_2c_1 > 2$ a time smo dokazali da zbroj neke dvije funkcije uvijek ima realna i različita rješenja. Rješavamo analogno za f_3 i neku od ranije zadanih jednadžbi.

Rješenje zadatka 14. Imamo 2 mogućnosti:
1. slučaj: sve 3 jednadžbe imaju isto rješenje:
$x^2 + ax + b = (x - u)(x - v)$
$x^2 + bx + c = (x - u)(x - w)$
$x^2 + cx + a = (x - u)(x - t)$

Izražavamo v,w,t preko u, koristeći se Vieteovim formulama, rješavamo sustav.
$u + v = a, \quad uv = b$
$u + w = b, \quad uw = c$
$u + t = c, \quad ut = a$

$$v = a - u$$
$$v = ut - u$$
$$v = u(c - u) - u$$
$$v = u(uw - u) - u$$
$$v = u(u(b - u) - u) - u$$
$$v = u(u(uv - u) - u) - u$$
$$v = u^3v - u^3 - u^2 - u$$
$$v = \frac{u^3 + u^2 + u}{u^3 - 1}$$

Analogno rješavamo za w i t, te dobijemo da su $v = w = t$, što znači da ovaj slučaj nema rješenja.

2. slučaj: 3 jednadžbe imaju 3 rješenja, raspoređena kružno.
$x^2 + ax + b = (x - u)(x - v)$
$x^2 + bx + c = (x - v)(x - w)$
$x^2 + cx + a = (x - w)(x - u)$

Rješenje zadatka 15. Lema 1. Neka su $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ dvije točke na kvadratnoj krivulji, i točka C sjecište tangenti kroz točke A i B. Tada je točka $x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$.

Dokaz Leme 1. Translatiramo krivulju na $y = x^2$ i uzmemo točke $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$.

$$\frac{y_c - a^2}{x_c - a} = 2a, \quad \frac{y_c - b^2}{x_c - b} = 2b$$

Kada riješimo sustav za x_c dobijemo $x_c = \frac{x_a+x_b}{2}$.
Lema 2. Konveksni četverokut ACBD ima upisanu kružnicu i CD presijeca AB. Tada je CD $\perp$ AB.

Po Lemi 1 znamo da je $C = D = \frac{x_a+x_b}{2}$ tj. CD raspolavlja AB.
Po Lemi 2 znamo da je CD $\perp$ AB. Neka je M polovište od AB. Kako točke C i D imaju istu x koordinatu znamo da je CD okomit na x-os, tj. da je AB paralelan sa x-osi, a to nam govori da je MD os simetrije za f_1, a MC os simetrije za f_2, a kako su M, D i C kolinearni, dokazali smo da f_1 i f_2 imaju istu os.