# Uvod u teoriju grafova

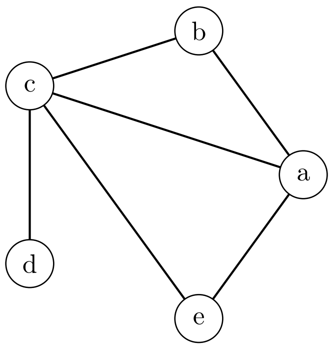
18. studenoga 2017.

## Uvod

Graf je matematička struktura kojom opisujemo veze između objekata. Sastoji se od čvorova i bridova. Grafom možemo predstaviti prijateljstva u skupu ljudi (čvorovi su ljudi, bridovi su prijateljstva), prometne veze između gradova (čvorovi su gradovi, bridovi su ceste), objekte u strujnom krugu (čvorovi su točke čvorišta, a bridovi su žice/otpornici), kemijske spojeve (čvorovi su atomi, a bridovi su veze među njima),...

## Teorija grafova

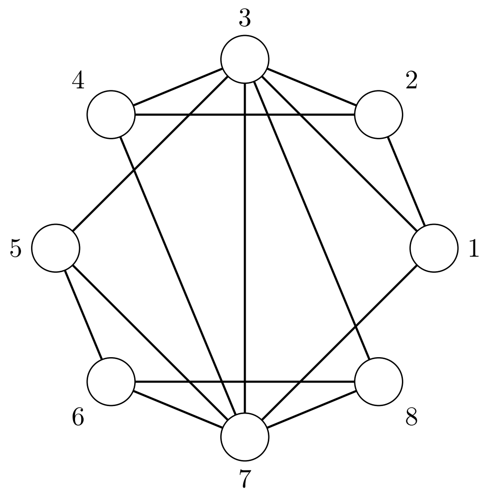
Graf $G$ koji sadrži skup čvorova $V$ i skup bridova $E$ označavamo s $G = (V, E)$. Elementi skupa $E$ su dvočlani skupovi koji predstavljaju vezu između dva čvora. Ako se svi bridovi u grafu mogu prelaziti u oba smjera kao u grafu prijateljstva, tj. nisu usmjereni od jednog čvora prema drugom. *Šetnja* je niz čvorova u kojem su svaka dva uzastopna čvora povezana bridom, dok je *put* šetnja u kojoj se bridovi ne ponavljaju put. Šetnja u kojoj je prvi čvor jednak posljednjem je *ciklus*, npr. $A$-$B$-$D$-$A$. Ovo je ujedno i *jednostavan ciklus* jer se u njemu svaki čvor osim prvog, tj. zadnjeg pojavljuje najviše jednom. Graf je *povezan* ako postoji put između svaka dva čvora. Inače ga možemo rastaviti na povezane komponente. *Stupanj* čvora $v$ je broj bridova koji sadrže čvor $v$. Kada kažemo graf, obično mislimo na *jednostavan graf*. On je neusmjeren i nema duplih bridova (dva brida koja povezuju isti par čvorova) niti bridova koji povezuju čvor sam sa sobom.




Ovaj graf ima skup čvorova $V = \{a, b, c, d, e\}$ i bridova $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}\}$. Stupanj čvora a je 3, a čvora $d$ je 1. Sadrži jednostavan ciklus $a$-$b$-$c$-$a$ i put $a$-$b$-$c$-$b$.

**Teorem 1.** *Zbroj stupnjeva svih čvorova u grafu je paran.*

*Dokaz.* Svaki brid $\{u, v\}$ povećava stupanj čvorova $u$ i $v$ za 1, dakle doprinosi ukupnom zbroju za 2 pa je zbroj svih stupnjeva (broj bridova) $\cdot$ 2.



**Zadatak 1.**
Postavite slova $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ i $H$ u čvorove grafa tako da uzastopna slova u abecedi nisu povezana bridom.

**Rješenje.**
Slova $A$ i $H$ imaju samo jednog susjeda pa ih je najbolje postaviti u čvorove 3 i 7 pošto oni imaju najveći stupanj. Neka je $A$ u čvoru 3, a $H$ u čvoru 7. Sada $B$ moramo postaviti u čvor 6, a $G$ u čvor 2. Slovo $C$ moramo postaviti u 5 ili 8, a $F$ u 1 ili 4, pa u najviše dva pokušaja možemo pronaći rješenje.

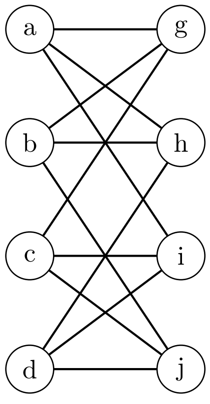
**Zadatak 2.**
Dokažite da ne postoji grupa ljudi u kojoj svatko ima različit broj prijatelja.

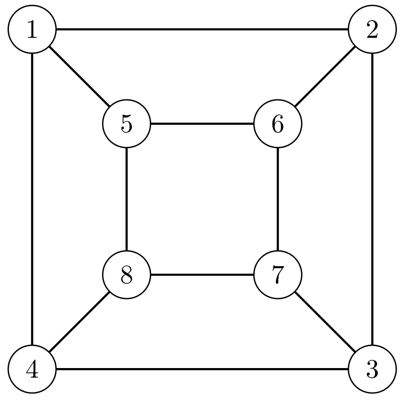
**Rješenje.**
Najveći broj prijatelja koji osoba može imati je $n-1$. Pretpostavimo da takva grupa postoji. Tada bi trebale postojati osobe koje imaju $0, 1, 2, \ldots, n-1$ prjiatelja. Ako probamo nacrtati takav graf prijateljstva lako se vidi da ne može istovremeno postojati osoba sa 0 i $n-1$ prijatelja, pa postoji najviše $n-1$ različitih broja prijateljstava, tj. stupnjeva čvorova u tom grafu. Sada po Dirichletovom načelu slijedi tvrdnja.

**Zadatak 3.**
Dokažite da u skupu od 6 ljudi postoje tri koja se ili međusobno svi poznaju ili se međusobno niko ne poznaje.

**Rješenje.**
Ako promatramo jednu osobu, ona će imati ili barem 3 poznanika ili barem 3 ljudi koje ne pozna. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da ima bar 3 poznanika. Kada bi se neki od tih poznanika poznavali, imali bi 3 osobe koje se međusobno poznaju. Inače imamo 3 osobe koje se međusobno ne poznaju.

Grafovi $G$ i $H$ su *izomorfni* ako možemo preimenovati čvorove grafa $G$ tako da bude identičan grafu $H$, tj. za svaka dva čvora $u$ i $v$, brid $\{u, v\}$ postoji u grafu $G$ nakon preimenovanja ako i samo ako postoji i u grafu $H$.





Ova dva grafa su izomorfna jer čvorove $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$ lijevog grafa možemo preimenovati u $(1, 6, 8, 3, 5, 2, 4, 7)$ i dobivamo desni graf.

*Komplement* grafa dobivamo tako da mu obrišemo sve bridove i stavimo brid između svaka dva čvora koja prije nisu bila povezana bridom. Brid u kopmlementu grafa postoji ako i samo ako ne postoji u tom grafu.

**Zadatak 4.**
Dokažite da ne postoji nepovezani komplement nepovezanog grafa.

**Rješenje.**
Neka je graf $G$ nepovezan. Dokazat ćemo da njegov komplement mora biti povezan, tj. da se iz bilo kojeg čvora u njegovom komplementu može doći u sve čvorove. Pošto je $G$ nepovezan, ima barem dvije povezane komponente. Odaberimo proizvoljan čvor u $G$. U komplementu će postojati brid između njega i bilo kojeg čvora koji nije u njegovoj kopmponenti. Isti brid sigurno ne postoji u G jer inače ne bi bili u odvojenim kopmonentama. Za čvorove koji su u njegovoj komponenti možemo preći bilo kojim bridom u čvor neke druge komponente i onda se vratiti u bilo koji čvor njegove kopmonente.

**Zadatak 5.**
Dokažite da graf koji je jednak svojem komplementu ima $4k$ ili $4k+1$ čvorova, gdje je $k$ prirodni broj.

**Rješenje.**
Zbroj broja bridova u grafu od n čvorova i njegovom komplementu je $n(n-1)/2)$. Pošto je graf jednak kopmlementu, imaju jednak broj bridova, a to može biti jedino ako imaju $n(n-1)/4$ bridova, što će biti cijeli broj samo onda kada je $n = 4k$ ili $4k+1$.

Graf je *bipartitan* ako mu čvorove možemo odvojiti u dva skupa (particije) tako da ne postoji brid koji povezuje dva čvora istog skupa. Drugim riječima, možemo mu čvorove obojiti u crno i bijelo tako da svaki brid povezuje čvorove različite boje.

**Teorem 2.** *Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži ciklus neparne duljine.*

*Dokaz.* Neka je graf bipartitan. Pretpostavimo da postoji ciklus neparne duljine. Uzmimo neki čvor kao početak i kraj tog ciklusa. Ako uzmemo da je taj čvor obojan crno, drugi čvor u ciklusu je obojan bijelo, treći opet crno, itd... Pošto je ciklus neparne duljine, vidimo da će zadnji tj. prvi čvor biti bijel što je nemoguće.
Obrnuto, pretpostavimo da graf ne sadrži neparan ciklus. Dokaz ide indukcijom po čvorovima. Postupak provodimo za svaku povezanu kopmonentu. Za početak uzmemo proizvoljan čvor u komponenti i obojamo ga bilo kako. Po pretpostavci indukcije graf svih obojenih čvorova je bipartitan. Pokažimo da svaki čvor u komponenti ili nema obojenih susjeda ili su mu svi obojeni susjedi iste boje. Neka je takav čvor $u$. Pretpostavimo da postoje dva susjeda čvora $u$ različite boje, neka su to $v$ i $w$. Pošto su oba obojena, po pretpostavci indukcije postoji put neparne duljine od $v$ do $w$ jer je graf bipartitan. Ako sada dodamo bridove $v$-$u$ i $u$-$w$, dobili smo ciklus neparne duljine što je kontradikcija. Pošto su mu svi susjedi iste boje, možemo ga obojati u suprotnu boju i novi graf je bipartitan.

**Zadatak 6.**
Mreža od $n$ tramvajskih stanica povezuje svake dvije stanice jedinstvenim putem. Gradonačelnik svake godine odabere neke dvije stanice kojima je najkraći put između njih neparne duljine i izgradi tračnice koje direktno povezuju te dvije stanice. Pokažite da nakon $n$ godina možemo obojati stanice crno i bijelo tako da ne postoje tračnice između dvije stanice iste boje.

**Rješenje.**
Početna mreža ne sadrži cikluse, jer kad bi postojao ciklus mogli bi uzeti dvije stanice u tom ciklusu i imali bi dva različita puta između njih. Stoga ne sadrži neparan ciklus pa je graf bipartitan. Indukcijom dokazujemo da graf ostaje bipartitan nakon svake godine. Neka je nakon $k$-te godine graf bipartitan. U $k+1$. godini dodajemo tračnice između $u$ i $v$. Pošto je najkraći put između $u$ i $v$ neparne duljine, oni su suprotno obojeni pa novi brid povezuje dva čvora različite boje, dakle graf ostaje bipartitan.

*Eulerova staza* je šetnja u kojoj su svi bridovi u grafu posjećeni točno jednom. Ako je ta šetnja ciklus, nazivamo ju Eulerov ciklus. Eulerov graf je onaj u kojem postoji Eulerova šetnja.

**Teorem 3.** *Graf je Eulerov ako i samo ako je povezan i stupnjevi svih čvorova su mu parni.*

*Dokaz.* Neka u grafu postoji Eulerov ciklus. Ako smo krenuli iz istog čvora i vratili se u isti čvor, onda smo u svaki čvor ušli i izašli jednak broj puta, a pošto smo to učinili različitim bridovima, svaki čvor ima parni stupanj.
Obrnuto, neka su svi stupnjevi u grafu parni. Dokaz provodimo indukcijom po bridovima tako da šetnju

konstruiramo ciklus po ciklus. Prvo za šetnju odaberemo proizvoljan ciklus i uklonimo bridove tog ciklusa iz grafa te označimo sve čvorove kroz koji je prolazio kao posjećene. Primjetimo da smo uklanjanjem bridova ciklusa smanjili stupanj svih posjećenih čvorova za 2 pa su stupnjevi svih čvorova i dalje parni. Pretpostavka indukcije je da su svi stupnjevi parni i da imamo konstruiranu šetnju koja prolazi kroz sve posjećene čvorove. Odaberemo neki brid koji ima bar jedan posjećeni čvor. Takav brid sigurno postoji jer je graf povezan. Sada odaberemo proizvoljan ciklus kroz taj brid. Ciklus postoji jer u koji god čvor uđemo, zbog parnog stupnja možemo iz njega i izaći pa ćemo kad-tad doći u početni čvor. Sada proširimo našu šetnju iz prethodnog koraka indukcije tako da obiđemo ovaj ciklus kada se nađemo u posjećenom čvoru. Izbrišemo bridove iz novog ciklusa i označimo eventualne novoposjećene čvorove. Postupak ponavljamo dok nismo posjetili sve bridove.

Povezani graf koji ne sadrži jednostavne cikluse nazivamo *stablo*. Graf u kojem je svaka povezana komponenta stablo nazivamo *šuma*.

**Zadatak 7.**
Dokaži da u stablu postoji *centroid*. Centroid je čvor čijim uklanjenjem dobivamo šumu u kojoj svako stablo ima najviše pola čvorova poćetnog stabla.

**Rješenje.**
Prvo odaberemo proizvoljan čvor u grafu. Ako je on centroid dokaz je gotov, inače postoji njemu susjedan čvor čije podstablo ima više od pola čvorova kad se odsječe. Sada se pomaknemo u taj čvor i ponavljamo postupak. Nikad se nećemo vratiti u čvor u kojem smo već bili jer on sa svojim podstablom ima manje od pola čvorova. Stoga ćemo sigurno pronaći centroid jer zbog konačnog broja čvorova ovaj postupak mora završiti.

**Zadatak 8.**
Trokut je skup od 3 čvora koji su svi međusobno povezani. Pronađite maksimalan broj bridova u grafu s parnim brojem čvorova koji ne sadrži trokut.