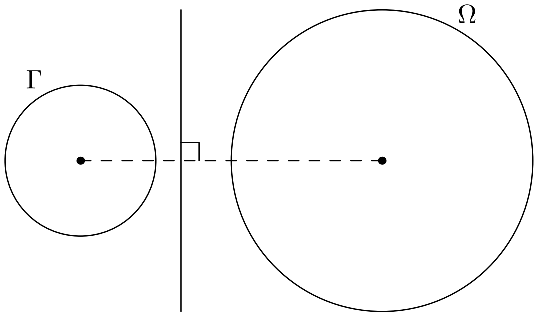
Kolinearnost i konkurentnost

25. studenoga 2017.

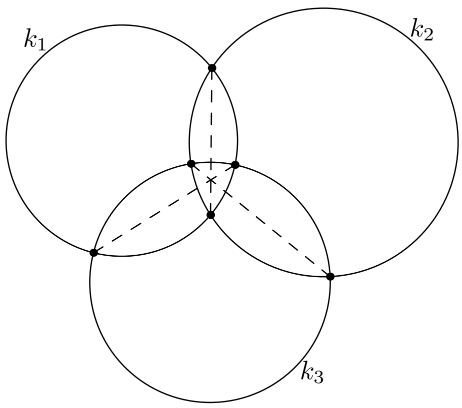
Uvod/teorijske osnove

U ovome predavanju bavit ćemo se dokazivanjem kolinearnosti i konkurentnosti u geometrijskim zadatcima. Navest ćemo najbitnije teoreme, a zatim ih primijeniti u nekoliko zadataka.

Teorem 1 (Radikalna os)**.** *Neka su Γ i Ω dvije ne-koncentrične kružnice. Geometrijsko mjesto točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice je pravac koji se zove radikalna os i okomit je na spojnicu središta. Ako se kružnice sijeku onda im radikalna os prolazi kroz oba sjecišta.*



Teorem 2 (Radikalno središte)**.** *Za dane tri kružnice (k_1, k_2 i k_3) s nekolinearnim središtima, sve 3 radikalne osi parova tih kružnica prolaze jednom točkom koja se zove radikalno središte. Ta točka ima jednaku potenciju na sve tri kružnice i jedinstvena je s tim svojstvom.*



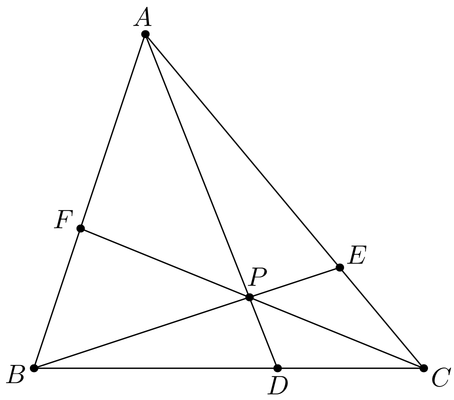
Dokaz teorema 2. Neka su p_1, p_2 i p_3 redom radikalne osi parova kružnica (k_2, k_3), (k_3, k_1) i (k_1, k_2). Definirajmo točku T kao presjek pravaca p_1 i p_2. Budući da je T na p_1, ona jednaku potenciju na k_2 i k_3. Analogno dobijemo da T ima jednaku potenciju na k_3 i k_1. Sada nam slijedi da T ima jednaku potenciju na k_1 i k_2 pa se T nalazi i na p_3. Ovime smo pokazali da točka T leži na sve tri radikalne osi pa time i da sva tri pravca prolaze jednom točkom. Jedinstvenost|AF|| |FB|slijedi iz č|BD|in|DC|jenice da sv|CE|e |EA|točke s istom potencijom na dvije kružnice leže na njihovoj radikalnoj osi i toga da se dva pravca sijeku u najviše jednoj točki.

(Napomena: Promatranje presjeka 2 pravca i pokazivanje da se nalazi i na trećem je osnovna metoda dokazivanja konkurentnosti 3 pravca. Analogno tome, kod dokazivanja kolinearnosti 3 točke osnovna metoda je definiranje pravca kroz 2 i pokazivanje da se i treća nalazi na tom pravcu.)

Teorem 3 (Cevin teorem)**.** *Dan je trokut ABC i točka P. Točke D, E i F definirane su kao $AP \cap BC$, $BP \cap CA$ i $CP \cap AB$ redom.*

Tada vrijedi:

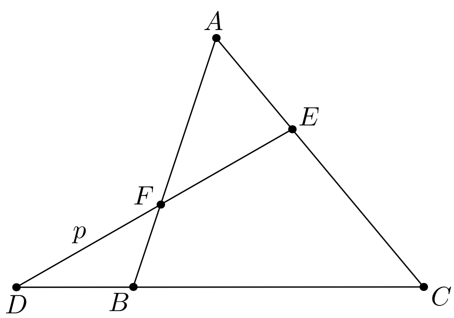
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



Teorem 4 (Menelajev teorem)**.** *Dan je trokut ABC i pravac p. Točke D, E i F definirane su kao $p \cap BC$, $p \cap CA$ i $p \cap AB$ redom.*

Tada vrijedi:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$



Primjer 1 (Obrat Cevinog teorema)**.** *Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su točke D, E i F redom tako da vrijedi:*

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Tada vrijedi da su pravci AD, BE i CF konkurentni.

Dokaz. Neka je P presjek pravaca AD i BE te neka je F' točka presjeka pravaca CP i AB. Po Cevinom teoremu dobivamo da vrijedi

$$\frac{AF'}{F'B} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

pa uz uvjet zadatka jos dobivamo i $\frac{AF}{FB} = \frac{AF'}{F'B}$ iz čeka dobivamo $F = F'$ što dokazuje željenu tvrdnju.

Zadatci

Zadatak 1.
Dokažite obrat Menelajevog teorema: Ako su na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta $\triangle ABC$ odabrane točke D i E redom te je na produžetku stranice $\overline{AB}$ odabrana točka F takva da vrijedi jednakost iz Menelajevog teorema, onda su točke D, E i F kolinearne.

Zadatak 2.
Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut te neka su mu H, O i M redom ortocentar, središte opisane kružnice i polovište stranice $\overline{BC}$. Neka je još D drugi presjek pravca AO s kružnicom opisanom danom trokutu. Dokaži da su točke H, M i D kolinearne.

Zadatak 3.
Dan je trokut $\triangle ABC$ i kružnica koja dira stranicu $\overline{BC}$ izvana te produžetke strana $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama K, L i M redom. Kružnica nad promjerom $\overline{BC}$ siječe dužinu $\overline{LM}$ u točkama P i Q (P između Q i L). Dokaži da se pravci BP i CQ sijeku u središtu dane kružnice.

Zadatak 4.
Neka su p i q paralelni pravci i k kružnica koja dira p u A i siječe q u B i C. Na pravcu p odabrana je točka T takva da pravci BT i CT sijeku k na kraćem luku AC u točkama K i L redom. Neka je M polovište dužine $\overline{AT}$. Dokaži da su točke K, L i M kolinearne.

Zadatak 5.
Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut te neka su B' i C' redom osnosimetrične slike vrhova B i C s obzirom na nasuprotne im stranice. Kružnice opisane trokutima $\triangle AC'C$ i $\triangle AB'B$ sijeku se u točkama A i P. Dokaži da središte opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ leži na pravcu AP.
(Državno 2017. prvi razred)

Zadatak 6.
Dan je šiljastokutan trokut $\triangle ABC$ čiji je ortocentar H. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka W te su M i N redom nožišta visina iz vrhova B i C. k_1 je kružnica opisana trokutu $\triangle BWN$ i X je točka na njoj takva da je $\overline{WX}$ promjer kružnice k_1. Analogno se definiraju k_2 i Y. Dokaži da su točke X, Y i H kolinearne.
(IMO 2013.)

Zadatak 7.
Neka su A, B, C i D četiri kolinearne točke zadane tim poretkom. k_1 i k_2 su redom kružnice nad promjerima $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ koje se sijeku u točkama X i Y. Neka je Z točka presjeka pravca XY i pravca na kojem leže polazne točke. Na dužini $\overline{XY}$ odabrana je točka P različita od Z. Točka M je drugi presjek pravca BP i kružnice k_2, a točka N drugi presjek pravca CP i kružnice k_1. Dokaži da su pravci AN, DM i XY konkurentni.

Rješenja zadataka

Rješenje zadatka 1. Slično kao u obratu Cevinog teorema definiramo točku F' kao presjek pravaca DE i AB. Sada za točke D, E i F' znamo da vrijedi jednakost iz Menelajevog teorema pa se isto kao i obratu Cevinog teorema pokaže: $F = F'$.

Rješenje zadatka 2. U ovom rješenju vidjet ćemo standardni trik kod dokazivanja kolinearnosti/konkurentnosti, tvrdnja zadatka u stvari govori da se pravci AO, HM i kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$ sijeku u točki D. Definirajmo točku D na drugi način, tj. kao točku presjeka pravca HM i kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$. Da bismo to formalno napravili nazovimo taj presjek D' te pokušajmo pokazati $D = D'$. Poznata lema je da je ta točka centralno simetrična slika točke H s centrom simetrije M. (Ako ne znate tu lemu pokušajte ju dokazati, definirate točku kao centralno simetričnu sliku točke H i angle-chasingom pokažete da je na opisanoj kružnici.) Dužine HD' i BC se međusobno raspolavljaju pa je četverokut $BD'CH$ paralelogram. $\angle ABD' = \angle ABC + \angle CBD' = \beta + \angle BCH = \beta + (90^\circ - \beta) = 90^\circ$ iz čega slijedi da je AD' promjer promatrane kružnice, no iz postavke zadatka znamo da je AD promjer te kružnice pa dobivamo $D = D'$ što nam daje željenu tvrdnju.

Rješenje zadatka 3. Definirajmo P' kao presjek dužina IB i LM, gdje je I središte promatrane kružnice. Slično, neka je Q' presjek dužina IC i LM. Želimo pokazati da je $P = P'$ i $Q = Q'$. Pokazat ćemo samo $Q = Q'$, a za $P = P'$ je dokaz analogan. Budući da kružnica sa središtem u I dira krakove kuta $\angle MCK$ u M i K vrijeki $\angle MCI = \angle ICK = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Slično se dobije $\angle KBI = 90 \circ - \frac{\beta}{2}$. Također vrijedi $CM = CK$. Sada imamo sukladnost trokuta MCQ' i KCQ' pa dobivamo $\angle CKQ' = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ iz čega slijedi $\angle CQ'K = \frac{\alpha+\gamma}{2} = \angle KBI$ pa dobivamo da je četverokut $BIQ'K$ tetivan. Slijedi $\angle CQ'B = 180^\circ - \angle IQ'B = 180^\circ - \angle IKB = 90^\circ$. Sada dobivamo da je točka Q' na kružnici nad promjerom BC, a budući da je i na LM dobivamo $Q = Q'$.

Rješenje zadatka 4. Definirajmo točku M' kao presjek pravaca p i LK. Pokažimo da je M' polovište dužine AT. $\angle M'Tb = \angle TBC = \angle KBC = \angle KLT$ iz čega dobivamo sličnost trokuta $M'TK$ i $M'LT$ što nam daje $|M'T|^2 = |M'K| \cdot |M'L|$, no potencija točke M' na promatranu kružnicu nam daje $|AM'|^2 = |M'K| \cdot |M'L|$ iz čega slijedi da je M' polovište dužine $\overline{AV}$.

Rješenje zadatka 5. Pokažimo prvo da se B i C nalaze na dužinama $\overline{C'P}$ i $\overline{B'P}$ redom. Definirajmo točku P' kao drugi presjek pravca $C'B$ i kružnice opisane trokutu $\triangle AC'C$. (Želimo pokazati: $P = P'$.) Budući da je četverokut $AC'P'C$ tetivan dobivamo $\angle C'P'A = \angle CP'A = 90^\circ - \alpha$. S druge strane budući da su četverokuti $AC'PC$ i $ABPB'$ tetivni također dobivamo $\angle C'PA = \angle B'PA = 90^\circ - \alpha$. Definirajmo B'' kao presjek pravaca BB' i $P'C$. Budući da je zbroj kuteva u trokutu $\triangle BP'B''$ jednak 180° računom dobivamo $\angle CB''B = 90^\circ - \gamma = \angle CB'B$ što nam daje: $B' = B''$. Sada imamo i $\angle AP'B' = \angle AP'C = 90^\circ - \alpha$. Zbog $\angle APB' = \angle AP'B'$ i $\angle C'P'A = \angle C'PA$ dobivamo da točke A, C', P i P' leže na jednoj kružnici te da točke A, B', P i P' leže na jednoj kružnici, a to nam daje da su P i P' sjecišta te dvije kružnice različita od A pa moraju biti ista točka. Sada dobivamo $\angle PAB = 90^\circ - \gamma = \angle OAB$, gdje je O središte kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$, pa slijedi da su točke A, O i P kolinearne što smo i htjeli dokazati.

Rješenje zadatka 6. Neka je Z sjecište kružnica k_1 i k_2 različito od W. Zbog $\angle BNC = \angle BMC$ imamo da je četveroktu $BCMN$ tetivan pa slijedi da je $|AN| \cdot |AB| = |AM| \cdot |AC|$, no kako je $|AN| \cdot |AB$ potencija točke A na k_1, a $|AM| \cdot |AC|$ potencija točke A na k_2 slijedi da je A na radikalnoj osi te dvije kružnice odnosno na pravcu WZ. Budući da su dužine $\overline{XW}$ i $\overline{YW}$ promjeri kružnica k_1 i k_2 slijedi $\angle YZW = \angle WZX = 90^\circ$, pa je Z na pravcu XY. Sada vidimo da je za dokazati tvrdnju zadatka dovoljno pokazati $\angle WZH = 90^\circ$. Spustimo visinu iz vrha A (prolazi kroz H) te joj nožište nazovimo K. Budući da je $\angle HNB = \angle BKH = 90^\circ$ vidimo da je četverokut $KHNB$ tetivan pa nam potencija točke A na njemu opisanu kružnicu daje $|AN| \cdot |AB| = |AH| \cdot |AK|$, no potencija točke A na k_1 nam također daje $|AN| \cdot |AB| = |AZ| \cdot |AW|$, pa slijedi da je četverokut $WZHK$ tetivan odnosno da je $\angle WZH = 180^\circ - \angle HKW = 90^\circ$ što smo i htjeli pokazati.

Rješenje zadatka 7. Primijetimo da je pravac XY radikalna os danih kružnica pa je tvrdnja zadatka ekvivalentna s time da je četverokut $ADMN$ tetivan. Budući da je P točka na radikalnoj osi danih kružnica imamo $|PB| \cdot |PM| = |PC| \cdot |PN|$ što nam da je da je četverokut $BCMN$ tetivan. Sada nam račun: $\angle ADM = \angle CDM = \angle BCM - \angle DMC = \angle BCM - (90^\circ - \angle CMB) = \angle BCM - (90^\circ - \angle CNB) = (180^\circ - \angle MNB) - \angle BNA = 180^\circ - \angle MNA$ daje da je četverokut $ADMN$ stvarno tetivan pa smo dokazali željenu tvrdnju.