MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Diofantske jednadžbe

2. prosinca 2017.

Uvod/teorijske osnove

Neka je f polinom s n varijabli i cjelobrojnim koeficjentima. Jednadžba oblika $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ čija su rješenja cijeli brojevi naziva se diofantska jednadžba.

Jednadžbe takve vrste razmatrao je već starogrčki matematičar Diofant (Diofant iz Aleksandrije, oko 250.god) i u njemu u čast su ove jednadžbe i dobile ime.

Najjednostavnije takve jednadžbe su linearne jednadžbe oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = m$$

gdje su m, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

Npr. u linearne diofantske jednadžbe spadaju jednadžbe $6x + 2y = 4$, $15x + y - 2z = 16\ldots$

Postoje i nelinearne diofantske jednadžbe (npr. $xy + 2x + y = 4$,$x^2 + 2y = 129283129$) te za njihovo rješavanje postiji niz metoda poput:

- metoda faktorizacije
- metoda kvocijenta
- metoda posljednje znamenke
- metoda kongruencija
- metoda nejednakosti

Linearne diofantske jednadžbe s dvije nepoznanice

Primjer 1. *Riješimo homogenu diofantsku jednadžbu* $3x + 5y = 0$

Rješenje. Izrazimo jednu nepoznanicu pomoću druge:

$$x = -\frac{5}{3}y$$

Budući da je x cijeli broj, y mora biti djeljiv s 3, tj. y je oblika $y = 3t$ gdje je t neki cijeli broj. Iz toga dobivamo da je $x = -5t$. Dobili smo da su rješenja početne jednadžbe svi uređeni parovi $(-5t, 3t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Teorem 1.

a) Diofantska jednadžba $ax + by = c$ *gdje su* $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$ *ima cjelobrojna rješenja ako i samo ako* $M(a, b)$ *dijeli* c.

b) Ako su x_0, y_0 *rješenja te jednadžbe onda su su sva rješenja oblika* $x = x_0 + \frac{b}{d}t, y = y_0 - \frac{a}{d}t$, $t \in \mathbb{Z}$ *te je* $d = M(a, b)$.

Rješenje (x_0, y_0) *naziva se partikularno rješenje diofantske te je opće rješenje zbroj partikularnih rješenja i rješenja homogene jednadžbe* $ax + by = 0$

Primjer 2. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $3x + 5y = 8$

Rješenje. Pokušajmo naći neki par (x_0, y_0) koji zadovoljava jednadžbu. Lako uočimo da je to uređen par $(1, 1)$ što nam je zapravo partikularno rješenje naše diofantske jednadžbe.Promatrajmo sada homogenu jednadžbu $3x + 5y = 0$. Iz prethodnog primjera znamo da su rješenja te jednadžbe svi uređeni parovi $(-5t, 3t)$, gdje je $t \in \mathbb{Z}$. Iz Teorema 1. zaključujemo da su rješenja opće jednadžbe parovi $(1 - 5t, 1 + 3t)$, $t \in \mathbb{Z}$.

Nelinearne diofantske jednadžbe

U ovom poglavlju bavit ćemo se nelinearnim diofantskim jednadžbama. Univerzalna metoda rješavanja tih jednadzzbi ne postoji, ali zato postoji niz metoda kojima rješavamo neke specijalne tipove nelinearnih diofantskih jednadžbi.

Metoda faktorizacije

Primjer 3. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $xy + x - 3y - 6 = 0$

Rješenje. Rastavimo lijevu stranu na faktore:

$$(xy + x) + (-3y - 3) - 3 = 0$$
$$x(y + 1) - 3(y + 1) = 3$$
$$(y + 1)(x - 3) = 3$$

Dakle, produkt cjelobrojnih izraza $y + 1$ i $x - 3$ jednak je 3, a to je moguće samo u slučajevima koji su dani u tablici:

x-3	1	-1	3	-3
y+1	3	-3	1	-1

Iz tablice zaključujemo koje vrijednosti poprimaju x i y.

x	4	2	6	0
y	2	-4	0	-2

Metoda kvocijenta

Primjer 4. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $xy + 2y = x$

Rješenje. Izrazimo jedno nepoznanicu preko druge, npr. y preko x.

$$y = \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$$

Pošto je $y \in \mathbb{Z}$ slijedi da je i izraz $\dfrac{2}{x+2} \in \mathbb{Z}$ a to vrijedi samo ako je $x + 2$ djelitelj broja 2, tj. $x + 2 \in \{1, -1, 2, -2\}$. Otuda dobivamo da je $x \in \{-1, -3, 0, -4\}$. Kada uvrstimo dobivene vrijednosti za x dobijemo odgovarajuće vrijednosti $y \in \{-1, 3, 0, 2\}$.

Metoda posljednje znamenke

Primjer 5. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $x^2 + 5y = 13971834641769123$

Rješenje. Budući da kvadrat cijelog broja završava sa znamenkom $0, 1, 4, 5, 6,$ ili 9,a broj $5y$ sa znamenkom 0 ili 5, slijedi da zbroj na lijevoj strani završava s $0, 1, 4, 5, 6,$ ili 9, a nikako s 3. Dakle, zadana diofantska jednadžba nema rješenja.

Metoda kongruencija

Primjer 6. *Riješimo diofantsku jednadžbu* $x^2 - 4y = 1995$

Rješenje. Budući da je 1995 neparni broj, a $4y$ parni, tada je x^2 neparan, tj. x je neparan. Možemo ga pisati u obliku $x = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvrstimo li to u početnu jednadžbu dobivamo:

$$(2k-1)^2 - 4y = 1995$$

$$4(k^2 + k - y) = 1994$$

Uočimo da je lijeva strana djeljiva s 4 dok desna strana nije, pa zaključujemo početna jednadžba nema rješenja.

Metoda nejednakosti

Primjer 7. *U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu* $a + b + c = abc$.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti neka je $a \leqslant b \leqslant c$.Tada je $abc = a + b + c \leqslant 3c$, odnosno $ab \leqslant 3$, pa razlikujemo tri slučaja:

1. $a = 1$, $b = 1$;
2. $a = 1$, $b = 2$;
3. $a = 1$, $b = 3$;

Uvrštavajući te vrijednosti u početnu jednadžbu u 1.slučaju dobijemo kontradikciju $(2 = 0)$, u 2.slučaj daje $c = 3$,a 3. daje $c = 2$ što je pak kontradikcija s $b \leqslant c$. Dakle, jedino rješenje je $(1, 2, 3)$.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Za prijevoz neke robe raspolažemo vrećama od 40 kg i 60 kg. Koliko treba uzeti jednih, a koliko drugih da se prenese 500 kg robe?

Rješenje.
Neka je x broj vreća od 40kg, a y broj vreća od 60 kg. Imamo jednadžbu $40x + 60y = 500$,tj. $x = \frac{500-60y}{40} = \frac{25-3y}{2}$, a to je prirodan broj pa y mora biti neparan, tj. za $1, 3, 5$ ili 7, dobijemo vrijednosti za x redom $11, 8, 5, 2$.

Zadatak 2.
Nadite sve prirodne brojeve n i proste brojeve p za koje vrijedi $n^3 + 7n^2 + 14n + 8 = 6p$.

Rješenje.
Rješenje: Uočimo da je
$n^3 + 7 * n^2 + 14n + 8 = n^3 + n^2 + 6n^2 + 6n + 8n + 8$
$= n^2(n + 1) + 6n(n + 1) + 8(n + 1)$
$= (n + 1)(n^2 + 6n + 8)$
$= (n + 1)(n^2 + 2n + 4n + 8)$
$= (n + 1)(n(n + 2) + 4(n + 2)$
$= (n + 1)(n + 2)(n + 4)$
Tada je $6p = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}p$ potpun rastav broja $6p$. Kako je $n+4 > n+2 > n+1 > 1$,to slijedi da je $n+1 = 2$,$n+2 = 3$,$n+4 = p$ jedino moguće rješenje pa dobivamo da je $n = 1$ i $p = 5$.

Zadatak 3.
Nadite sva cjelobrojna rješsenja jednadžbe $3xy + 2y = 7$.

Rješenje.
Jednadžbu zapišemo u obliku $y(3x+2)=7$ pa kako su y i $3x+2$ cijeli brojevi, imamo slijedeće mogućnosti:
1. $y=1, 3x+2=7 \implies x=\frac{5}{3}, y=1$
2. $y=-1, 3x+2=-7 \implies x=-3 y=-1$
3. $y=7, 3x+2=1 \implies x=-\frac{1}{3}, y=7$
4. $y=-7, 3x+2=-1 \implies x=-1, y=-7$
Slijedi da imamo dva rješenja $(-3,-1)$ i $(-1,-7)$

Zadatak 4.
Pokažite da jednadžba $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=35$ nema cjelobrojnih rješenja.

Rješenje.
$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=(xy+yz)[(x-y)^2-(x-y)(y-z)+(y-z)^2]-(x-z)^3$
$=(x-z)[(x-y)^2-(x-y)(y-z)+(y-z)^2-(z-x)^2]$
$=(x-z)[(x-y)(x-y-y+z)+(y-x)(y-2z+x)]$
$=(x-z)(x-y)(3z-3y)$
$=3(x-z)(x-y)(z-y)$,
pa slijedi da je lijeva strana jednadžbe djeljiva s 3. Kako 35 nije djeljivo s 3, jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 5.
Nađite sve prirodne brojeve n za koje $n+2$ dijeli n^4+2.

Rješenje.
Treba naći prirodne brojeve tako da je $\frac{n^4+2}{n+2}$ cijeli broj.
$\frac{n^4+2}{n+2}=\frac{n^4+2n^3-2n^3-4n^2+4n^2+8n-8n-16+16+2}{n+2}$
$=\frac{n^3(n+2)-2n^2(n+2)+4n(n+2)-8(n+2)+18}{n+2}$
$=\frac{(n+2)(n^3-2n^2+4n-8)+18}{n+2}$
$=n^3-2n^2+4n-8+\frac{18}{n+2}$
Nužno je i dovoljno da je $\frac{18}{n+2}$ prirodan broj. Kako je $n+2>2$, slijedi da je $n\in 3,6,9,18$, odnosno $n\in 1,4,7,16$.

Zadatak 6.
Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba $3^x-2^y=5$?

Rješenje.
Iz $3^x=5+2^y>5$ slijedi da je $x\geqslant 2$,pa je onda $2^y=3^x-5\geqslant 3^2-5=4$ povlači da je i $y\geqslant 2$. Za $y=2$ iz $3^x=5+2^2=9$ slijedi $x=2$. Za $y>2$ je 2^y djeljivo s 8, pa je $5+2^y\equiv 5 \pmod 8$. Pogledajmo sada koje ostatke pri dijeljenju s 8 daje 3^x. Razlikujemo dva slučaja, kada je x paran,odnosno neparan:

1. $x=2k \implies 3^x=3^{2k}=9^k\equiv 1^k=1 \pmod 8$;
2. $x=2k+1 \implies 3^x=3^{2k+1}=3\cdot 9^k\equiv 3\cdot 1^k=3 \pmod 8$.

Slijedi da $3^x=5+2^y$ pri dijeljenju s 8 ne može dati ostatak 5 pa stoga za $y>2$ nema rješenja. Jedino rješenje je $x=2$, $y=2$.

Zadatak 7.
Postoje li cijeli brojevi m i n koji zadovoljavaju jednadžbu $n^4+16m=7993$?

Rješenje.
Ako bi n bio paran broj tada bi lijeva strana jednadžbe takoder bila parna, a kako je 7993 neparan, to ne bismo imali rješenja. Stoga je, ako rješenje postoji, nužno $n=2k+1$ za neki cijeli broj k. Uvrstimo li taj izraz u našu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned}(2k+1)^4+16m&=7993\\(4k^2+4k+1)^2+16m&=7993\\16k^4+16k^2+1+32k^3+8k^2+8k+16m&=7993\\8(2k^4+2k^2+1+4k^3+k^2+k)+16m&=7992\\2(k^4+2k^3+k^2+m)+k(k+1)&=999.\end{aligned}$$

Budući da je produkt dva uzastopna cijela broja uvijek djeljiv s 2 (dakle 2 dijeli $k(k+1)$), to slijedi da je cijela lijeva strana u zadnjoj jednakosti parna. Kako je 999 neparan, znači da jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 8.
Riješimo diofantsku jednadžbu $3^x + 4^x = 5^x$, gdje je x realan broj.

Rješenje.
Očito je $x = 2$ jedno rješenje ove jednadžbe. Dijeljenjem zadane jednadžbe s 5^x dobivamo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

Za $x < 2$ je $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x > (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, a za $x > 2$ vrijedi $(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x < (\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x = 1$, te osim $x = 2$ jednadžba nema drugih rješenja.

Zadatak 9.
Nađite cjelobrojna rješenja jednadžbe $5^x + y^4 = 194482$

Rješenje.
Ako je $x < 0$ tada 5^x nije cijeli broj, a kako y^4 i 194482 to jesu, slijedi da u ovom slučaju nema rješenja.
Ako je $x = 0$ onda je $y^4 = 194481$, što povlači da je $y = 21$.
Ako je $x > 0$ tada 5^x završava znamenkom 5, pa budući da y^4 nužno završava nekom od znamenaka $0, 1, 5, 6$ pa slijedi da $5^x + y^4$ mora završavati nekom od znamenaka $5, 6, 0, 1$.Kako 194482 završava znamenkom 2 slijedi da u ovom slučaju nema rješenja.
Dakle, jedino rješenje je $x = 0$, $y = 21$.