MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Dokazivanje kombinatornim argumentom

9. prosinca 2017.

Potrebno predznanje za ovo predavanje su osnove prebrojavanja. Trebate znati što su to permutacije i kombinacije, kada se koriste i na koji način. Za više o tim pojmovima pogledajte predavanje Kombinatorika-uvod.

Uvod/teorijske osnove

Ponekad je kombinatornim argumentom lakše dokazati neku jednakost. Dokazivanje kombinatornim argumentom u ovom slučaju znači naći kombinatornu interpretaciju za lijevu i desnu stranu jednakosti. Zatim treba utvrditi da smo na ta dva načina prebrojavali istu stvar, iz čega zaključujemo da vrijedi zadana jednakost.

Zadatak 1.
Kombinatornim argumentom dokažite

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Rješenje zadatka 1. Pretpostavimo da imamo n-člani skup i biramo k-člani podskup. Lijeva strana jednakosti označava broj načina na koji možemo izabrati taj podskup, a desna strana jednakosti označava broj načina na koji možemo odabrati komplement nekog k-članog podskupa. Kako za svaki podskup postoji jedinstveni komplement, tada su i ova dva broja jednaka. Odnosno, odabirom komplementa na jedinstven način smo odabrali i k-člani podskup.

Zadatak 2.
Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Rješenje.
Odredite broj svih podskupova n-članog skupa.

Zadatak 3.
Kombinatornim argumentom dokažite: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Rješenje.
Izdvojite poseban element i rastavite na slučajeve.

Zadatak 4.
Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \cdot \binom{n-r}{m-r}.$$

Rješenje.
Npr. na koliko načina možemo odabrati $m-r$ učenika koji treniraju samo košarku i r učenika koji treniraju i košarku i nogomet u školi koju pohađa n učenika?

Zadatak 5.
Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Rješenje.
Rastavite $m+n$-člani skup na dva disjnuktna skupa, m-člani i n-člani podskup.

Zadatak 6.
Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Rješenje.
Biranje podskupa i izdvojenog elementa. Npr. biramo neku ekipu i njenog vođu.

Zadatak 7.
Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Rješenje.
Biramo $k+1$-člani podskup n-članog skupa tako da prvo odaberemo najveći element a zatim ostalih n

Zadatak 8.
Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}.$$

Rješenje.
Npr. biramo r člani podskup ljudi koji vole slikati i k-člani podkup ljudi koji vole i čitati i slikati.

Zadatak 9.
Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{n} = \binom{n+1+r}{r}.$$

Rješenje.
Biramo $n+1$-člani podskup, s tim da prvo biramo najveći element tog podskupa.

Zadatak 10.
Kombinatornim argumentom dokažite:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Rješenje.
Podijelite $2n$ člani skup na dva disjunktna n-člana skupa.

Zadatak 11.
Kombinatornim argumentom dokažite:
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

Rješenje.
Podijelite $2n$-člani skup na dva disjunktna n-člana podskupa i zatim birajte 2-člani podskup.

Zadatak 12.
Kombinatornim argumentom dokažite:
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m} \cdot 2^m.$$

Rješenje.
Biramo m-člani podskup n članog skupa, npr. m učenika koji će ići na natjecanje iz matematike, a neki od tih m učenika ići će i na natjecanje iz informatike. Na koliko načina možemo odabrati takvu grupu?

Rješenje zadatka 2. Lijeva strana označava broj načina na koji možemo odabrati 0-člani, 1-člani,...n-člani podskup n-članog skupa, tj. broj podskupova n-lanog skupa. Probajmo sad odrediti broj podskupova tog skupa. Za svaki element možemo odabrati hoće li ili neće biti u podskupu, tj. za svaki element imamo 2 izbora pa je to ukupno 2^n izbora.

Rješenje zadatka 3. Desna strana je broj k-članih podskupova $n+1$-članog skupa. Za lijevu stranu jednakosti izdvojimo jedan element a iz tog $n+1$ članog skupu. Imamo $\binom{n}{k}$ podskupova kojima a nije element i $\binom{n}{k-1}$ takvih podskupova ako a je element. To je ukupno $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$, što je i trebalo dokazati.

Rješenje zadatka 4. Zamislimo ovakvu situaciju. Od n učenika biramo $m-r$ njih koji će ići samo na natjecanje iz matematike i r koji će ići na natjecanja i iz matematike i iz fizike. Lijevu stranu jednakosti dobijemo tako da prvo odaberemo m učenika koji će ići na ta natjecanja, a onda od tih m odaberemo njih r koji će ići na oba natjecanja. Desnu stranu jednakosti dobijemo tako da prvo od n učenika odaberemo njih r koji idu na oba natjecanja, a zatim odaberemo od preostalih $n-r$ učenika njih $m-r$ koji idu samo na natjecanje iz matematike.

Rješenje zadatka 5. Pretpostavimo da imamo m žena i n muškaraca i od njih izabiremo grupu od r ljudi. To možemo na $\binom{m+n}{r}$ načina. Možemo ih birati i ovako: odaberemo k žena na $\binom{m}{k}$ načina i $r-k$ muškaraca na $\binom{n}{r-k}$ načina. Sumiranjem po k dobijemo izbor svih r članih grupa.

Rješenje zadatka 6. Pretpostavimo da od n ljudi odabiremo njih nekoliko koji će ići na planinarenje i odabiremo organizatora izleta. Ako prvo odaberemo organizatora (to možemo na n načina) i zatim nekoliko ljudi koji još idu na planinarenje(zapravo biramo podskup preostalih $n-1$ ljudi, što možemo na 2^{n-1} načina), dobijemo $n \cdot 2^{n-1}$, što je desna strana jednakosti. Možemo prvo i odabrati sve ljude koji idu na planinarenje pa zatim među njima odabrati organizatora. Ako želimo da i ljudi ide na izlet (to odabiremo na $\binom{n}{i}$ načina), traženi odabir ljudi možemo dobiti na $i \cdot \binom{n}{i}$ načina, tj. rastavili smo problem na slučajeve ovisno o veličine grupe pa sumiranjem po i dobijemo broj odabira svih takvih grupa ljudi, a dobijemo i lijevu stranu tražene jednakosti.

Rješenje zadatka 7. Desnu stranu jednakosti je broj izbora $k+1$-članog podskupa $n+1$-članog skupa, npr. skupa prvih $n+1$ prirodnih brojeva. Možemo prvo odabrati najveći element $k+1$ članog podskupa, a zatim izabrati preostalih k elementa. Npr. ako je $r+1$ najveći element našeg podskupa, preostalih k elementa možemo odabrati na $\binom{r}{k}$ načina. Ako to napravimo za svaki r, ukupan broj načina bude upravo lijeva strana jednakosti.

Rješenje zadatka 8. Između n ljudi biramo njih r koji vole slikati i k koji vole i slikati i čitati. Možemo prvo odabrati k ljudi koji vole oboje na $\binom{n}{k}$ koji vole oboje, a zatim od preostalih $n-k$ ljudi biramo njih nekoliko koji vole samo slikati (biramo neki podskup $n-k$-članog skupa) i to možemo na 2^{n-k} načina, tj. sve ukupno na $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ načina. To je upravo desna strana jednakosti. Možemo prvo odabrati r ljudi koji vole slikati, a zatim između njih odabrati još njih k koji vole i čitati. To možemo na $\binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k}$. To možemo napraviti za svaki r, tj. ukupan broj načina traženih odabira je upravo izraz na lijevoj strani.

Rješenje zadatka 9. Iz prvog zadatka znamo da je $\binom{n+1+r}{r} = \binom{n+1+r}{n+1}$. Desnu stranu tada možemo interpretirati kao broj načina na koji možemo od prvih $n+1+r$ prirodnih brojeva odabrati njih $n+1$. $n+1$ podskup možemo odabrati i tako da odaberemo najveći element, npr $n+i+1$ i zatim od prvih $n+i$ brojeva odaberemo preostalih n, za svaki i , to je ukupno $\binom{n+i}{n}$ načina. Sumiranjem po i dobijemo ukupan broj načina odabira traženog podskupa i lijevu stranu jednakosti.

Rješenje zadatka 10. Pretpostavimo da imamo $2n$ ljudi, n muškaraca i n žena i između njih odabiremo grupu od n ljudi. To možemo napraviti na $\binom{2n}{n}$ načina, što je upravo lijeva strana jednakosti. Desnu stranu jednakosti (prema 1) možemo napisati kao $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. n-članu grupu ljudi možemo odabrati k muškaraca i $n-k$ žena na $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$. Ukupan broj načina odabira tražene grupe ljudi je upravo kad sumiramo sve ovako izraze, tj. upravo lijeva strana jednakosti koju smo trebali dokazati.

Rješenje zadatka 11. Između $2n$-člane udruge biramo 2 voditelja. To možemo napraviti na $\binom{2n}{2}$ načina, što je upravo lijeva strana jednakosti. Podijelimo sada članove na 2 n-člane skupine. Tada, ako je po jedan voditelj iz svake skupine imamo n^2 mogućih izbora. Ako su oba voditelja iz iste skupine, onda ih možemo odabrati na $2 \cdot \binom{n}{2}$ načina(na 2 načina možemo odabrati iz koje su skupine voditelji, a zatim na $\binom{n}{2}$ načina biramo roditelje). Ukupno, voditelje možemo odabrati na $n^2 + 2 \cdot \binom{n}{2}$ načina, a to je upravo desna strana jednakosti.

Rješenje zadatka 12. Pretpostavimo da imamo n ljudi u glazbenoj školi i želimo odabrati m ljudi koji će svirati i nekoliko njih koji će i pjevati i svirati. Ako prvo odaberemo njih k koji će pjevati i svirati (to možemo na $\binom{n}{k}$ načina), a zatim od preostalih $n-k$ ljudi njih $m-k$ koji će samo svirati (to možemo na $\binom{n-k}{m-k}$), tj. na $\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$