| O9 | Olimpijska grupa |
| --- | --- |

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

# Aritmetičke funkcije

Ivan Novak

30. studenog 2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr    Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"    matematicari.mnm

## Osnovne definicije

Aritmetička funkcija je bilo koja funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Za aritmetičku funkciju $f$ kažemo da je multiplikativna ako je $f(1) \neq 0$ i ako za svaka dva relativno prosta prirodna broja $x$ i $y$ vrijedi $f(xy) = f(x)f(y)$. Ako to vrijedi za svaka dva prirodna broja, kažemo da je potpuno multiplikativna.

## Dirichletov umnožak

Za neke dvije aritmetičke funkcije $f$ i $g$, definiramo njihovu *Dirichletovu konvoluciju* $f * g$ (ili Dirichletov produkt, ili Dirichletov umnožak, ili samo konvoluciju) na sljedeći način:

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}).$$

Za svake tri aritmetičke funkcije $f, g, h$ vrijedi

- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Definirajmo funkciju $I$ tako da za svaki $n$ vrijedi $I(n) = \lfloor 1/n \rfloor$. Tada za svaku aritmetičku funkciju $f$ vrijedi

$$f * I = I * f = f.$$

Nadalje, može se indukcijom pokazati da za svaku aritmetičku funkciju $f$ takvu da je $f(1) \neq 0$ postoji jedinstvena funkcija $g$ takva da vrijedi

$$f * g = I.$$

Iz prethodne diskusije slijedi da skup svih aritmetičkih funkcija koje u 1 nisu jednake 0 s operacijom Dirichletove konvolucije čini komutativnu grupu kojoj je neutralni element funkcija $I$.

Još jedno važno svojstvo konvolucije je da čuva multiplikativnost; ako su $f$ i $g$ multiplikativne, tada je i $f * g$. Također, ako su $f$ i $f * g$ multiplikativne, tada je i $g$.

## Möbiusova inverzija

Definiramo funkciju $u$ tako da za svaki $n$ vrijedi $u(n) = 1$. Također, definiramo funkciju $N$ tako da za svaki $n$ vrijedi $N(n) = n$.

Inverz funkcije $u$ je Möbiusova funkcija $\mu$, definirana na sljedeći način:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{za n=1} \\ 0 & \text{ako } p^2 \mid n \text{ za neki } p > 1 \\ (-1)^k & \text{ako je } n \text{ umnožak } k \text{ različitih prostih brojeva.} \end{cases}$$

Zbog svojstva $u * \mu = I$, za svake dvije aritmetičke funkcije $f$ i $g$, vrijedi

$$\sum_{d|n} f(d) = g(n) \text{ za svaki } n \in \mathbb{N} \iff \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d})g(d) = f(n) \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Ovo svojstvo nazivamo formula Möbiusove inverzije.

## Eulerova $\varphi$ funkcija

Za prirodan broj $n$, $\varphi(n)$ je broj prirodnih brojeva manjih od $n+1$ relativno prostih s $n$.

Za $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ vrijedi

$$\varphi(n) = p_1^{e_1-1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k-1} \cdot (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Ova funkcija je multiplikativna. Nadalje, vrijedi $\varphi * u = N$, pa je $\varphi = \mu * N$.

## Broj djelitelja $d$

Za $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ vrijedi

$$\tau(n) = (e_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (e_k + 1).$$

Ova funkcija je isto multiplikativna. Vrijedi $d = u * u$, pa je $d * \mu = u$, i $d * \mu * \mu = I$.

## Zbroj djelitelja $\sigma$

Za $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ vrijedi

$$\tau(n) = \frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{e_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Ova funkcija je isto multiplikativna, i vrijedi $\sigma = u * N$, pa je $\sigma * \mu = N$.

.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

## Zadaci

1. Za prirodan broj $n$, neka je $f(n)$ zbroj primitivnih $n$-tih korijena od jedinice, odnosno zbroj svih kompleksnih brojeva $z$ takvih da je $z^n = 1$ i da je $n$ najmanji takav prirodan broj. Dokaži da vrijedi $f(n) = \mu(n)$.

2. Dokaži da za svaki prirodan broj $n > 1$ vrijedi

$$\sum_{\substack{(k,n)=1 \\ k \leqslant n}} k = \frac{n\varphi(n)}{2}.$$

3. Neka je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva tako da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$2^n = \sum_{d|n} a_d.$$

   Dokaži da $n$ dijeli $a_n$.

4. Funkcija $f$ is skupa $\mathbb{N}$ u samog sebe definirana je ovako:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \gcd(k, n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   a) Dokaži da vrijedi $f(mn) = f(m)f(n)$ za svaka dva relativno prosta $m, n \in \mathbb{N}$.

   b) Dokaži da za svaki $a \in \mathbb{N}$ jednadžba $f(x) = ax$ ima rješenje.

   c) Odredi sve $a \in \mathbb{N}$ takve da jednadžba $f(x) = ax$ ima jedinstveno rješenje.

5. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz prirodnih brojeva takav da za svaki $m$ i $n$ vrijedi $\gcd(a_m, a_n) = a_{\gcd(m,n)}$. Dokaži da postoji jedinstven niz prirodnih brojeva $b_1, b_2, \ldots$ tako da vrijedi $a_n = \prod_{d|n} b_d$ za svaki prirodan broj $n$.