

Uvod

Prilikom rješavanja zadataka vezanih uz brojeve uvijek je zgodno imati na umu činjenicu da svaki cijeli broj možemo napisati kao umnožak prostih brojeva. Ova činjenica se zato i zove *osnovni teorem aritmetike*. To nam pomaze kod djeljivosti cijelih brojeva.

Djeljivost umnožaka

Umnožak je djeljiv s nekim brojem ako je djeljiv sa svim faktorima tog broja.

- (OS 8, ZUP 2019, 4) Koliko ima trojki uzastopnih troznamenkastih prirodnih brojeva takvih da je njihov umnožak djeljiv brojem 120?
- (OS 8, DRZ 2009, 2) Dokaži da je razlika kvadrata bilo koja dva neparna broja djeljiva s 8.
- (OS 8, DRZ 2015, 2) Ako je svaki od dvaju neparnih cijelih brojeva djeljiv brojem 3, razlika njihovih kvadrata djeljiva je brojem 72. Dokaži!
- (OPC 2009, SS 1, 8) Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 - 440$ potpuni kvadrat.
- (OPC 2005, SS 1, 2) Dokažite da je za svaki prirodan broj n , broj $n^5 - n$ djeljiv s 30.
- Za koje prirodne brojeve n vrijedi $120 | n^5 - n$?
- Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi $6 | n^3 + 5n$.
- (Ogledni HJMO (3) 2017) Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je broj $(a + b)(a + 3b)$ djeljiv sa 4, ali nije djeljiv sa 8. Dokaži da je tada broj $(a + b)(a + 3b)(a + 5b)$ djeljiv sa 8, ali nije djeljiv sa 16.

Cjelobrojni razlomci

- (OS 7, DRZ 2019, 3) Odredi sve cijele brojeve x za koje je razlomak $\frac{4x - 17}{5x + 9}$ također cijeli broj.
- (ZUP 2018, OS 8, 1) Odredi sve prirodne brojeve a takve da je broj $\sqrt{\frac{a + 64}{a - 64}}$ također prirodan broj.
- (OS 8, DRZ 1990, 1) Odredi sve cijele brojeve a za koje je razlomak $\frac{a^2 + 1}{a - 1}$ također cijeli broj.

Najveći zajednički djelitelj

- Koji je najveći broj koji dijeli brojeve 56 i 98? A za brojeve 212 i 544?

Broj iz prethodnog zadatka općenito se naziva *najveći zajednički djelitelj* i označava se s nzd ili gcd . Racuna se ili rastavom brojeva na proste faktore i onda uzimanjem svih zajedničkih faktora, ili jednostavnije i općenitije putem Euklidovog algoritma za dijeljenje s ostatkom. Vazno je znati da za $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\text{gcd}(m, n) = \text{gcd}(m, n - m)$.

- Dokažite da je $\text{gcd}(5a + 3b, 13a + 8b) = \text{gcd}(a, b)$.
- U ovisnosti o n odredi $\text{gcd}(2n + 3, n + 7)$.
- (OPC 1997, SS 1, 2) Neka su x i y cijeli brojevi. Dokaži da je tada $3x + y$ djeljivo s 13 ako i samo ako je $5x + 6y$ djeljivo s 13.
- Dokaži da je razlomak $\frac{12n + 1}{30n + 2}$ neskrativ za sve prirodne brojeve n .
- (Ogledni HJMO (2) 2017) Odredi sve prirodne brojeve n za koje se razlomak $\frac{5n + 6}{8n + 7}$ može skratiti.