O15	Olimpijska grupa

Predavanja subotom
Zagreb, sezona 2019./2020.

Nejednakosti - tips and tricks

Ivan Sinčić

8.2.2020.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

Uvod

U ovom predavanju pojavit rješavat ćemo zadatke u kojima će se pojaviti neke ideje kao što su metoda kontradikcije, pažnja na slučaj jednakosti, promjena predznaka razlomka i slično.

Zadaci

1. Neka su $x, y, z \geq 0$ takvi da je $x + y + z = 1$. Odredi maksimalnu vrijednost izraza $xy^2 + xz^2 + 2xyz$.
2. Dokaži da za $x, y, z \geq 0$ vrijedi:
$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz + |(x - y)(y - z)(z - x)|$$
3. (Balkan MO 2005.) Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a - b)^2}{a + b + c}$ i odredi kada se postiže jednakost.
4. Dokaži da za sve $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takve da je $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$ i $x_0 - x_n \leq 1$ vrijedi:
$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq n^2 + 1$$
5. (HMO 2017.) Dokaži da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi:
$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} + \sqrt{\frac{ab + bc + ac}{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{5}{2}$$
6. Neka su a, b, c nenegativni realni brojevi takvi da vrijedi $ab + bc + ac + 2abc = 1$. Dokaži da vrijedi:
$$\frac{1}{8a^2 + 1} + \frac{1}{8b^2 + 1} + \frac{1}{8c^2 + 1} \geq 1$$
7. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Dokaži da vrijedi:
$$abcd \leq (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)$$
8. Neka su a, b, c nenegativni realni brojevi takvi da vrijedi:
$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} = 2$$
Dokaži da vrijedi $ab + bc + ac \leq \frac{3}{2}$.
9. Neka su $x, y, z > 0$ takvi da je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Odredi maksimalnu vrijednost izraza:
$$\frac{1}{1 - xy} + \frac{1}{1 - yz} + \frac{1}{1 - xz}$$

Rubrika ”Dobro je znati”

Neke od ovih lema je teže dokazati nego bilo koji od prethodno navedenih zadataka, ali ako naučite njihove dokaze, mogle bi vam pomoći u rješavanju olimpijskih zadataka.

Neka su $a, b > 0$. Tada vrijedi:

1. $a + b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}$ ili u drugom obliku: $a^2 - ab + b^2 \geq \sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$
2. $a + b \geq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ili u drugom obliku: $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$

Neka su $a, b, c > 0$. Tada vrijedi:

1. $(ab + bc + ac)^2 \geq 3abc(a + b + c)$
2. (8/9 lema) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ac)$
3. $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$
4. (Vasc's inequality) $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$
5. $\frac{4}{27}(a + b + c)^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a + abc$
6. (Nesbitt) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$
7. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$
8. $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ac}$