

Uvod

Algoritam je niz koraka koje je potrebno izvršiti za određenu proceduru.

Oni nam pružaju mogućnost dokazivanja određene tvrdnje sa nizom koraka koji u nekim slučajevima konstruira određeno stanje čije je postojanje potrebno dokazati, a ponekada je i sami algoritam opisan u postavci zadatka te ga je potrebno analizirati.

U ovom predavanju ćemo se susresti sa najpoznatijim *pohlepnim* algoritmom (eng. *greedy*)

Primjer 1. Označimo sa δ maksimalan stupanj vrhova u danom grafu. Je li moguće obojati graf koristeći maksimalno $\delta + 1$ boju tako da su svaka dva susjedna vrha različite boje.

Rješenje. Koristit ćemo sljedeći pohlepni algoritam. Svaki vrh ćemo obojati nekom bojom koja još nije iskorištena za bojanje njihovih susjeda. Budući da svaki vrh ima najviše δ susjeda, barem jedna od $\delta + 1$ boja nije iskorištena, ovime smo pokazali da je u svakom koraku moguće odabrati boju. $\square$

Upoznat ćemo se i sa drugim algoritmima koji zahtjevaju uvođenje invarijanti ili monovarijanti, te algoritmi koji reduciraju kompleksnu konfiguraciju u jednostavniju i pritom zadržavaju kombinatorna svojstva polaznog problema.

Lakši zadaci

1. Dokaži da se svaki $n \in \mathbb{N}$ može na jedinstven način prikazati kao suma različitih fibbonacijevih brojeva tako da ne sadrži dva uzastopna člana fibbonacijevog niza u svom zapisu.
2. Dan je graf G sa E bridova i V vrhova, dokaži da postoji inducirani podgraf H grafa G tako da svaki vrh ima stupanj barem E/V . (Inducirani podgraf grafa G dobijamo otklanjajući proizvoljan broj vrhova iz grafa zajedno sa bridovima koji izlaze iz tih vrhova.)
3. (IMO Shortlist 1989) Na svakom polju $m \times n$ ploče je upisan prirodan broj, dozvoljen potez je odabrati dva susjedna polja (polja koja dijele brid) i umanjiti brojeve za $k \in \mathbb{N}$ tako da oba broja ostanu nenegativni. Odredi nužan i dovoljan uvjet da pomoću konačnog broja ovih poteza dobijemo ploču koja ima 0 u svakom polju.

Umjereni zadaci

4. (IMO 1983) Postoji li skup od 1983 prirodna broja, svi manji od 10^5 tako da za svaka tri člana tog skupa vrijedi da nisu uzastopni članovi aritmetičkog niza?
5. (IMO Shortlist 2001, generalizacija) Skup od tri nenegativna cijela broja $\{x, y, z\}$ sa $x < y < z$ nazivamo *povijesnim* ako $\{z - y, y - x\} = \{a, b\}$ za neke $0 < a < b$. Dokaži da se skup svih prirodnih brojeva može zapisati kao unija po parovima disjunktih povijesnih skupova.
6. (IMO Shortlist 2013) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Nađi najmanji prirodan broj k sa sljedećim svojstvom; Ako su dani realni brojevi $a_1, \dots, a_d$ takvi da $a_1 + a_2 + \dots + a_d = n$ i $0 \leq a_i \leq 1$ za $i = 1, 2, \dots, d$, moguće je rasporediti ove brojeve u k grupa (neke od kojih mogu biti prazne) tako da je suma brojeva u svakoj grupi najviše 1.
7. Dan je prirodan broj n , $2n$ ljudi su zasjeli na kružni stol, i m kolačića je nekako raspoređeno među njima. Kolačići se mogu predati pod sljedećim pravilima:
 - a) Svaka osoba može predat kolačić samo svojim susjedima
 - b) Svaki put kada netko preda kolačić, i sam mora pojesti još jedan
 Neka je A jedna od ovih osoba. Nađi najmanji m tako da bez obzira na početni način raspodjele ovih m kolačića, postoji strategija predavanja kolačića tako da A primi barem jedan k.

Teži zadaci

8. (MEMO 2008) Na ploči je dano $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ brojeva. U svakom koraku odaberemo dva broja s ploče i zamjenimo oba broja sa njihovom sumom. Odredi sve n za koje je moguće nakon konačno mnogo ovakvih koraka postići stanje sa n identičnih brojeva na ploči.

9. (IMO 2010) Svaka od šest kutija $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ u početku ima po jedan novčić. Dozvoljene su sljedeće operacije :

1. Odabрати nepraznu kutiju $B_i, 1 \leq i \leq 5$, oduzeti jedan novčić iz B_i i dodati dva kutiji B_{i+1}

2. Odabрати nepraznu kutiju $B_k, 1 \leq k \leq 4$, oduzeti jedan novčić iz B_k i zamjeniti sadržaje kutija B_{k+1} i B_{k+2} .

Postoji li konačan niz navedenih operacija, tako da prvih pet kutija budu prazne, dok B_6 ima točno $2010^{2010^{2010}}$.

10. (IMO 2014) Skup pravaca u ravnini je u generalnoj poziciji ako nikoja dva pravca nisu paralelna i nikoja tri pravca ne prolaze istom točkom. Skup pravaca u generalnoj poziciji siječe ravninu u regije, neke od kojih imaju konačnu površinu; ovakve regije zovemo konačne regije. Dokaži da je za dovoljno velik n , u bilo kojem skupu od n pravaca u generalnoj poziciji moguće obojati barem $\sqrt{n}$ pravaca u plavo na način da sve konačne regije nemaju u potpunosti plavi rub.

Više zadataka vezanih uz ovu temu možete pronaći na ovom izvrsnom pdfu

Cody Johnson - Algorithms (<https://people.bath.ac.uk/masgcs/algorithms.pdf>).