

Uvod

U ovom predavanju ćemo podrazumijevati da ste upoznati s osnovnim pojmovima i rezultatima iz djeljivosti i kongruencija. Jedan od osnovnih rezultata općenito u teoriji brojeva jest sljedeći:

Teorem (Mali Fermatov). *Neka je a cijeli broj i p prost broj koji ne dijeli a . Tada vrijedi:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

1. Odredi sve proste brojeve p takve da $p \mid 4^p + 5^p$
2. Neka je $p > 7$ prost broj. Dokaži da $p \mid \underbrace{11 \dots 1}_{p-1}$
3. Odredi sve proste brojeve p takve da $p^2 \mid 5^{p^2} + 1$
4. (a) Dokaži da za svaki par različitih prostih brojeva (p, q) postoji par prirodnih brojeva (m, n) takvih da vrijedi:

$$p^m + q^n \equiv 1 \pmod{pq}$$

- (b) Postoji li za svaki par različitih prostih brojeva (p, q) beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da vrijedi:

$$p^n + q^n \equiv 1 \pmod{pq}$$

5. Dokaži da ako prost broj p dijeli $a^p - b^p$ za neke $a, b \in \mathbb{N}$, tada p^2 također dijeli $a^p - b^p$.

Teorem (Eulerov). *Neka su a i n relativno prosti prirodni brojevi. Tada vrijedi:*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Napomena. Neka je $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ kanonski prikaz prirodnog broja n . Tada vrijedi:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

6. Odredi posljednje tri znamenke broja 3^{1999} .
7. Dokaži da za svaki paran broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n^2 - 1 \mid 2^{n!} - 1$

Teži zadaci

1. Dokaži da za cijeli x broj $x^2 + 1$ nema djelitelja oblika $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}_0$).
2. Dokaži da jednačba $y^2 = x^3 + 7$ nema rješenja u cijelim brojevima.
3. Neka je p prost broj oblika $3k + 2$ koji dijeli $a^2 + ab + b^2$ za neke $a, b \in \mathbb{N}$. Dokaži da p dijeli brojeve a i b .
4. Odredi sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da je $4mn - m - n$ potpuni kvadrat.
5. Dokaži da postoji beskonačan niz brojeva oblika $2^n - 3$, $n \in \mathbb{N}$, za koji vrijedi da su svaka dva među njima relativno prosta.
6. Dokaži da za svaki prost broj p postoji beskonačno mnogo brojeva oblika $2^n - n$, $n \in \mathbb{N}$, koji su djeljivi s p .
7. **(MEMO 2018. Ekipno)** Neka je $a_1, a_2, \dots$ niz prirodnih brojeva tako da je $a_1 = 1$ i $a_{k+1} = a_k^3 + 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dokaži da za svaki prost broj p oblika $3t + 2$, gdje je t nenegativan cijeli broj, postoji prirodan broj n takav da $p \mid a_n$.