J7	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Potencija točke i radikalna os

Lana Frkin

14. prosinca 2019.

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

mnm.hr   Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"   matematicari.mnm

Potencija točke

Potencija točke T na kružnicu k: Neka je k kružnica i T neka točka u ravnini. Neka je s pravac koji prolazi točkom T i dira kružnicu u barem jednoj točki. Neka su to točke A i B (mogu biti ista točka). Potencija točke T na kružnicu k je umnožak $|TA| \cdot |TB|$.

1. Dana je točka T i kružnica k. Kroz T su povučena dva pravca koji sijeku danu kružnicu u A i B, odnosno C i D. Dokažite da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

2. **Poučak o kutu tangente i tetive** Vrhom C trokuta $\triangle ABC$ povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je T proizvoljna točka na toj tangenti tako da se točke A i T nalaze na različitim stranama pravca BC. Dokažite $\angle TCB = \angle CAB$.

3. Vrhom C trokuta $\triangle ABC$ povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je T presjek pravca AB i te tangente. Dokažite $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$.

Umnožak iz 3. zadatka naziva se **potencija točke** T na kružnicu upisanu trokutu $\triangle ABC$.

4. Dan je četverokut $ABCD$ i točka T na presjeku pravaca AB i CD tako da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$. Dokažite da je dani četverokut tetivan.

Neka je k kružnica, te neka je O središte, a r radijus te kružnice. Kažemo da je **potencija točke T u odnosu na kružnicu** k : $|PO|^2 - r^2$. (Hint: Neka su A i B točke u kojima pravac OT sječe kružnicu k). Po konvenciji, potencija točke P je pozitivna ako je izvan kruga, a negativna ako je unutar kruga. Kada je P izvan kruga potencija točke P jednaka je kvadratu udaljenosti tangente na P od P do kružnice.

Radikalna os

Geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na dvije kružnice je pravac pa ćemo stoga taj pravac nazvati **radikalna os**.

5. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku u točkama A i B. Dokažite da je pravac AB geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice.

6. Dane su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u K i L te zajednička tangenta na te dvije kružnice koja ih dira u točkama A i B, tim redom. Neka je M točka na presjeku pravaca AB i KL. Dokažite da je $|AM| = |BM|$.

7. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice. Dokažite da je geometrijsko mjesto točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice pravac okomit na spojnicu središta tih kružnica.

Zadaci

8. Kružnice k_1 i k_2, radijusa r_1 i r_2, dodiruju se izvana u točki A. Na kružnici k_1 odabrana je točka B i $|AB| = a$. Neka je T diralište kružnice k_1 i tangente na tu kružnicu povučene iz točke B. Izrazite $|BT|$ pomoću r_1, r_2 i a.

9. Dane su tri kružnice k_1, k_2 i k_3 te pravci s_1, s_2 i s_3 koji su redom radikalne osi parova kružnica (k_1, k_2), (k_2, k_3) i (k_1, k_3). Dokažite da su s_1, s_2 i s_3 paralelni pravci ako su središta danih kružnica kolinearna, a u suprotnom prolaze istom točkom. Ta točka zove se radikalno središte.

10. Dvije kružnice, k_1 i k_2, sijeku se u točkama S i T. Neka je P točka na pravcu ST. Na k_1 odabrane su točke A i B, a na k_2 odabrane su C i D takve da su A, B i P te C, D i P kolinearne. Dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivan.

11. Dan je trokut ABC i točka T na pravcu AB takva da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$. Dokažite da je pravac TC tangenta na kružnicu opisanu trokutu ABC.

12. Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle ABC > 90°$, odnosno $|AC| > |BD|$. Opisana kružnica trokuta BCD siječe dijagonalu $\overline{AC}$ po drugi put u točki M. Dokažite da je pravac BD zajednička tangenta na kružnice opisane trokutima ABM i ADM.

13. Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su redom točke D, E i F takve da je četverokut $BCEF$ tetivan. Neka je T drugo sjecište kružnica opisanih trokutima BDF i CDE. Dokažite da su točke A, D i T kolinearne.

14. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su redom točke E i F takve da su pravci EF i BC paralelni. Dokažite da se kružnice kojima su $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ promjeri sijeku na pravcu koji prolazi vrhom A, a okomit je na stranicu $\overline{BC}$ trokuta.

Teži zadaci

15. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se ne sjeku. Dokažite da je geometrijsko mjesto središta kružnica koje su ortogonalne na njih njihova radikalna os. (Dvije su kružnice ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.)

16. Neka su A, B, C i D kolinearne točke tim redoslijedom. Kružnice promjera $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točkama X i Y. Neka je P točka na pravcu XY koja se ne nalazi na pravcu AB te neka su M i N drugi presjeci pravaca CP i BP s kružnicama nad $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, tim redom. Dokažite da se pravci AM, DN i XY sijeku u jednoj točki.

17. Neka je ABC šiljastokutan trokut s ortocentrom H i D točka na stranici $\overline{BC}$. Neka su E i F redom nožišta visina iz vrhova B i C. Neka je k_1 kružnica opisana trokutu BDF i točka X takva da je $\overline{DX}$ promjer kružnice k_1. Analogno su definirane kružnice k_2 i Y. Dokažite da su točke X, Y i H kolinearne.