J9	Juniorska grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Invarijante

Ivan Miošić

15.02.2020.

Mladi nadareni matematičari
“Marin Getaldić”

mnm.hr Mladi nadareni matematičari “Marin Getaldić” matematicari.mnm

Uvod

Neki zadatci s natjecanja izgledaju kao da zahtijevaju promatranje jako puno slučajeva ili duboko razmatranje, nalik na predviđanje poteza u šahu. Jako često ti zadatci i govore o nekoj igri, ili općenito o nekom *sustavu* koji se mijenja u *koracima* po određenim *pravilima*. U ovom predavanju naučit ćemo jednu moćnu tehniku za izlaženje na kraj sa složenosti ovakvih sustava, a to je **invarijanta sustava**.
Kako invarijanta funkcionira? Zapravo dosta jednostavno: uočimo neku veličinu vezanu za sustav koja se *ne mijenja* (invarijantna je) tijekom promjena sustava po pravilima. Pomoću nje možemo riješiti zadatak, tako da usporedimo vrijednosti invarijante u početnom i željenom stanju. Primjetimo da invarijanta funkcionira donekle slično kao indukcija, jer prvo odredimo bazno stanje i onda promatramo što se događa u bilo kojem koraku. Postoje razne vrste invarijanti, od kojih su najčešće: zbroj ili umnožak nekih veličina, parnost ili ostatak pri dijeljenju s nekim brojem, broj objekata s nekim svojstvom. Evo dva primjera.

Primjer 1. Na ploči su napisani brojevi od 1 do 2019 u rastućem poretku. Dozvoljeni korak je sljedeći: izaberemo tri različita broja (a, b, c) te ih zamijenimo s $(2b - a, 2c - b, 2a - c)$. Je li moguće postići da na ploči pišu svi brojevi od 2 do 2020?

Rješenje. Promotrimo zbroj brojeva na ploči. Dokažimo da se on ne mijenja dozvoljenom transformacijom. Ako je u nekom trenutku zbroj jednak S, nakon jednog koraka on će biti jednak

$$S' = S - (a + b + c) + ((2b - a) + (2c - b) + (2a - c))$$

jer smo izbrisali brojeve a, b, c i umjesto njih napisali $2b - a, 2c - b, 2a - c$. Iz ovoga slijedi $S' = S$, dakle zbroj se ne mijenja. □

Primjer 2. Može li skakač obići sva polja šahovske ploče stajući na svako točno jednom i pritom se vratiti na početno polje?

Rješenje. Promotrimo boju polja na kojoj se skakač nalazi. □

Dakle, kad god nam se čini da neki zadatak ne možemo riješiti “predviđanjem poteza”, pokušamo pronaći invarijantu sustava. Rješenja koja dobivamo ovim postupkom uglavnom su *negativna*, tj. sljedećeg oblika: nemoguće je prijeći iz početnog stanja sustava u neki traženi, po zadanim pravilima, jer se vrijednosti invarijante ne podudaraju. Najteži dio postupka je pronaći odgovarajuću invarijantu, tako da probajte razne mogućnosti i ne odustajte ni nakon prva 3 pokušaja.

Lakši zadaci

1. Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, kao standardna šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu i obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

2. Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši žeton na polju Y.
Može li se, konačnim nizom takvih poteza, premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče?

3. Na početku se na ploči nalaze brojevi 2009, 2012 i 2015. Željko u svakom koraku označi brojeve na ploči s a, b i c u nekom poretku, a zatim ih zamjenjuje brojevima $3a-b$, $3b-c$ i $3c-a$. Može li Željko uzastopnom primjenom ovog postupka postići da na ploči u nekom trenutku pišu tri jednaka broja?

Umjereni zadaci

4. Tri skakavca sjede u tri vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala dva te se smjesti u točku simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo takvih skokova stići u četvrti vrh kvadrata?

5. U 20 posuda (od kojih svaka ima barem 210 litara) nalazi se redom $1, 2, 3, \ldots, 20$ litara vode. Iz posude A u posudu B dozvoljeno je preliti točno onoliko vode koliko već ima u posudi B (uz pretpostavku da u posudi A ima barem toliko vode koliko u B). Da li je moguće nakon konačno mnogo prelijevanja dobiti:

a) 5 posuda s po 3 litre vode, a u preostalih 15 posuda po $6, 7, \ldots, 20$ litara;

b) svih 210 litara vode u jednoj posudi?

6. Boris je na vrlo veliku ploču napisao sve brojeve od 1 do $1,000,000$. Nakon toga ide od jednog do drugog i zamjenjuje svakoga zbrojem njegovih znamenki. Ovaj postupak ponavlja sve dok mu ne ostane $1,000,000$ jednoznamenkastih brojeva. Hoće li među njima biti više brojeva 1 ili 2?

7. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a-b$ i $13a-3b$.
Ako su na početku na ploči brojevi 1, 2, 3, 4, $\ldots$, 2011, 2012, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi 2, 4, 6, 8, $\ldots$, 4022, 4024?

8. U svaki vrh pravilnog dvanaesterokuta A_1, A_2, $\ldots$, A_{12} upisan je ili broj 1 ili broj -1. Na početku je u vrh A_1 upisan broj -1, a u sve ostale vrhove broj 1. Dozvoljeno je istovremeno promijeniti predznak brojeva u bilo kojih šest uzastopnih vrhova tog dvanaesterokuta.
Dokaži da ponavljanjem ovog postupka ne možemo postići da u vrh A_2 bude upisan broj -1, a u sve ostale vrhove broj 1.

9. Dano je 2014 žetona koji su s jedne strane crne, a s druge bijele boje i ploča dimenzija 2014×1. Na početku se na svakom polju ploče nalazi po jedan žeton, okrenut na crnu ili na bijelu stranu. U svakom potezu dozvoljeno je ukloniti jedan žeton okrenut na crnu stranu i istovremeno preokrenuti žetone na susjednim poljima (ako nisu već uklonjeni).
Odredi sve početne rasporede žetona za koje je nizom takvih poteza moguće ukloniti sve žetone.

10. Žaba skače po točkama koordinatne mreže počevši od točke $(1,1)$ po sljedećim pravilima:

(i) iz točke (a,b) žaba smije skočiti u točku $(2a,b)$, odnosno $(a,2b)$;

(ii) ako je $a > b$ žaba smije skočiti iz (a,b) u $(a-b,b)$, a ako je $a < b$ žaba smije skočiti iz (a,b) u $(a,b-a)$.

Može li žaba stići u točku

(a) $(24,40)$

(b) $(40,60)$

(c) $(24,60)$

(d) $(200,4)$

11. Neka su a_1, a_2, $\ldots$, a_n brojevi iz skupa $\{-1,1\}$. Ako vrijedi da je

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0$$

dokažite da je n djeljiv s 4.

Teži zadaci

12. Na ploči su napisani brojevi $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2001}$. Učenik odabire dva broja s ploče, recimo x i y, te izračuna broj $x + y + xy$, rezultat zapiše na ploču, a x i y obriše. Odredite broj koji će ostati na ploči nakon što ovaj postupak obavi 2000 puta.

13. Osam žarulja poredano je u krug. Svaka žarulja može biti ili upaljena ili ugašena. U jednom koraku radimo sljedeću transformaciju: žarulja će nakon transformacija biti ugašena, ukoliko je jedna od njoj susjednih žarulja upaljena, a druga ugašena; žarulja će nakon transformacije svijetliti, ukoliko su obe njoj susjedne žarulje ili upaljene ili ugašene. (U jednom se koraku na stanja svih žarulja djeluje istovremeno.)
Dokažite da će, nakon najviše četiri koraka, sve žarulje svijetliti.

14. Pravilni poligon s 2005 stranica ima vrhove obojane crvenom, bijelom i plavom bojom. "Dozvoljenim bojanjem" zovemo bojanje u kojem dva susjedna vrha, koja su obojana različitim bojama, obojimo trećom bojom.

a) Dokažite da postoji konačan niz “dozvoljenih bojanja" nakon kojeg su svi vrhovi poligona iste boje.

b) Je li ta boja jednoznačno određena početnim rasporedom boja vrhova?

15. (Državno natjecanje iz matematike 2015, SŠ1 A 4) Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geq 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti proizvoljni iznos. Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

Više zadataka vezanih uz ovu temu možete pronaći na Školjci (`www.skoljka.org`).

Hintovi

1.

Rješenja

1. Županijsko natjecanje 2014 SŠ1 5.

2. Županijsko natjecanje 2010 SŠ1 5.

3. Županijsko natjecanje 2012 SŠ1 5.

4. Županijsko natjecanje 2009 SŠ2 5.

5. Županijsko natjecanje 2004 SŠ2 3.

6. Važno je uočiti da zbroj znamenki broja ima isti ostatak pri dijeljenju s 9 kao i sam broj. Stoga se broj brojeva koji daju pojedini ostatak pri dijeljenju s 9 ne mijenja. Kako na početku ima više brojeva koji daju ostatak 1 nego ostataka 2, zaključujemo da će na kraju biti više jedinica nego dvojki.

7. Državno natjecanje 2012 SŠ3 5.

8. Županijsko natjecanje 2014 SŠ3 5.

9. Državno natjecanje 2014 SŠ4 3.

10. Državno natjecanje 2004 SŠ2 4.

11. Primjetimo da se svaki a_i nalazi u točno četiri pribrojnika. Stoga se suma njegovom zamjenom promijeni za ± 8, ± 4 ili 0. Ako sada za sve a_i uzmemo jedan, dobijemo točno n, koji onda mora dati isti ostatak pri dijeljenju s 4 kao početni zbroj. No, taj početni zbroj je 0, što upravo znači da je n djeljiv s 4.

12. Državno natjecanje 2001 SŠ3 3.

13. Državno natjecanje 1998 SŠ4 4.

14. Državno natjecanje 2005 SŠ3 4.