Znamenke

Goran Ivanković

18.1.2019.

Uvod

U ovom predavanju pozabavit ćemo se zadacima sa znamenkama. To obuhvaća pitanja poput koja je posljednja znamenka nekog broja, pronađi sve brojeve takve da im je suma znamenaka 4, i slično.

Brojevni sustavi

Opće je poznato da zapisujemo brojeve koristeći 10 znamenaka. Takav zapis zovemo dekadski zapis nekog broja. Vrijedi: $\overline{x_n \cdots x_1 x_0} = 10^n x_n + \cdots + 10x_1 + x_0$.
No brojevi se također mogu zapisati u nekoj drugoj bazi. Primjerice računala se koriste binarnim sustavom samo sa znamenkama 0 i 1.
Općenito pišemo $\overline{x_n \cdots x_1 x_0} = b^n x_n + \cdots + bx_1 + x_0$, te vrijedi $x_n, \cdots, x_0 \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

Primjer 1

Pogledajmo kada je broj djeljiv s 11. Zbrojimo znamenke na neparnim mjestima broja n i oduzmimo znamenke na parnim mjestima broja n. Ako je dobivena razlika djeljiva s 11, n je djeljiv s 11. Dokažimo.

1) Svaki broj koji ima paran broj znamenki, a sve su znamenke devetke, djeljiv je s 11. Ovu je tvrdnju lako provjeriti. Naime, svaki takav broj možemo zapisati u obliku $9999\ldots99 = 99 \cdot (10^{2n}10^{2n-2}\ldots10^2 + 1)$

2) Svaki broj oblika $10^{2n} - 1$ djeljiv je s 11. Ako od broja 10^{2n} oduzmemo 1, dobit ćemo broj koji se sastoji od parnog broja devetki.

3) Svaki broj oblika $10^{2n+1} + 1$ djeljiv je s 11. $10^{2n+1} + 1 = 10 \cdot (10^{2n} - 1) + 11$, što je djeljivo s 11.

4)

$$\overline{x_n \cdots x_0} = 10^n x_n + \cdots + x_0$$

$$\overline{x_n \cdots x_0} \equiv x_0 + 11 \cdot x_1 - x_1 + 99 \cdot x_2 + x_2 + 1001 \cdot x_3 - x_3 + \ldots\ (MOD11)$$

Kako su brojevi $11, 99, 1001, \ldots$ djeljivi s 11 (zbog 2 i 3), gornja tvrdnja ekvivalentna je s:

$$\overline{x_n \cdots x_0} \equiv x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \ldots\ (MOD11)$$

i time je početna tvrdnja dokazana.

Primjer 2

Označimo sa $S(M)$ sumu znamenaka prirodnog broja M u dekadskom zapisu. Neka je N najmanji prirodan broj takav da je $S(N) = 2013$. Koliko je $S(5N + 2013)$?
Kako bismo pronašli najmanji, cilj nam je minimizirati broj znamenaka. To postižemo tako da biramo znamenke da budu 9. Kako je $2013 \equiv 6(MOD9)$, moramo imati jednu znamenku 6. Zaključujemo da je najmanji takav broj
$N = 6999\ldots999$ (znamenka 9 ponavlja se 223 puta)
$N = 7000\ldots000 - 1$ (0 se ponavlja 223 puta)
$5n + 2013 = 35000\ldots0005 + 2013$ (0 se ponavlja 223 puta)
Dakle $S(5n + 2013) = 3 + 5 + 2 + 8 = 18$.

Lakši zadaci

1. Nađi posljednju znamenku broja $1! - 2! + 3! - 4! + \cdots + 99!$
2. Postoji li 8-znamenkasti broj bez 0 u dekadskom zapisu koji pri dijeljenju sa svojom prvom znamenkom daje ostatak 1, pri dijeljenju s drugom daje ostatak 2, ... , te pri dijeljenju s osmom daje ostatak 8.
3. Dokaži da je broj čiji se dekadski zapis sastoji od 2187 znamenki 1 djeljiv s 2187.
4. U kojem brojevnom sustavu $297|792$ (tj. 297 dijeli 792)?
5. Može li suma znamenaka kvadrata nekog broja biti 2013?
6. Ako se dvoznamenkastom broju pribroji umnožak njegovih znamenaka, dobije se kvadrat zbroja tih znamenaka. Odredi sve takve brojeve.
7. Neka je $S(n)$ suma znamenaka prirodnog broja n.

   Nađi $S(1) - S(2) + ... + S(2013) - S(2014)$.
8. Peteroznamenkastom broju suma znamenaka jednaka je 37 i djeljiv je s 37.

   Dokaži da mu je treća znamenka 9.
9. Odredi, ako postoje, najmanji i najveći prirodni broj kojem je umnožak znamenaka 18900.
10. Nađi sve četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{aabb}$ koji su potpuni kvadrati.
11. Posljednja znamenka broja n^{9102} je 9. Odredi posljednju znamenku broja n^{2019} (n je prirodan broj).

Teži zadaci

12. Odredite sve 200-znamenkaste prirodne brojeve (u dekadskom zapisu) koji su kvadrati prirodnih brojeva, a počinju s 99 devetki.
13. Dokažite da među svakih 79 uzastopnih prirodnih brojeva postoji barem jedan čija je suma znamenaka djeljiva s 13. Nađite niz od 78 uzastopnih prirodnih brojeva sa svojstvom da suma znamenaka niti jednog od njih nije djeljiva s 13.
14. Nađite posljednje četiri znamenke broja 3^{1000} i broja 3^{1997}.
15. Prirodan broj n zovemo *Mozartov broj* ako brojevi $1, 2, \ldots, n$ zajedno sadrže paran broj svake znamenke (u dekadskom zapisu).

    Dokaži:

    (a) Svi su *Mozartovi brojevi* parni.

    (b) Postoji beskonačno mnogo *Mozartovih brojeva*.

Rješenja

1. AOPS - https://artofproblemsolving.com/community/q1h1841147p12371570
2. AOPS - https://artofproblemsolving.com/community/c6h1828616p12238925
3. Županijsko natjecanje 2013 SŠ4 3 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2013/2013-SS-zupanijsko-1234-zad+rj/2013-SS-zup-A-1234-rj.pdf
4. Županijsko natjecanje 1998 SŠ4 4 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1998/1998-SS-zup-1234-zad+rj/1998-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf
5. Teorija brojeva - https://www.skoljka.org/solution/2504/
6. Županijsko natjecanje 2008 SŠ2 5 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2008/2008-SS-zup-1234-AB-zad+rj/2008-SS-zup-1234-A-rj.pdf
7. AOPS - https://artofproblemsolving.com/community/c6h1742048p11329195
8. AOPS - https://artofproblemsolving.com/community/c6h1726193p11178604
9. Županijsko natjecanje 2007 SŠ4 1 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2007/2007-SS-zup-1234-AB-zad+rj/2007-SS-zup-1234-A-zad%2Brj.pdf
10. AOPS - Napisati rješenje
11. AOPS - https://artofproblemsolving.com/community/c3h1963392p13588021
12. Županijsko natjecanje 1998 SŠ3 4 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1998/1998-SS-zup-1234-zad+rj/1998-SS-zup-1234-zad%2Brj.pdf
13. Državno natjecanje 1998 SŠ3 4 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1998/1998-SS-drz-1234-zad+rj/1998-SS-drz-1234-zad%2Brj.pdf
14. Državno natjecanje 1997 SŠ4 1 - http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/1997/1997-SS-drz-1234-zad+rj/1997-SS-drz-1234-zad%2Brj.pdf
15. MEMO 2016 ekipno problem T7 - https://www.math.aau.at/MEMO2016/wp-content/uploads/2015/08/MEMO2016_Solutions-7.pdf