

Uvod

- U ovom predavanju obrađujemo kombinatorne igre koje uključuju dva igrača.
- Zadatci opisuju igru i pitaju nas da pronađemo pobjedničku strategiju za nekog od igrača (ako uopće takva postoji). Precizno su iskazani početna pozicija, dozvoljeni potezi i konačna ili pobjednička pozicija.
- Tehnike kojima ćemo se služiti je iznenađujuće jednostavna, ali učinkovita **simetrija**, slijede **bojanja**, **invarijante**, **rekurzije**, **indukcija**, **parnost** i vrlo važna tehnika koju ćemo posljednju obraditi poznata kao **analiza pozicija**.
- Termin "kombinatorne igre" općenito se koristi za opis igara sa sljedećim svojstvima:
 1. Nema elemenata igara na sreću ili vjerojatnosti (npr. bacanja kocaka ili novčića)
 2. Oba igrača znaju sve informacije (ne postoji nešto što jedan zna, a drugi ne)
 3. Igrači igraju naizmjenice. U ovom predavanju, gdje imamo igrače **A** i **B**, uvijek je **A** onaj koji započinje prvi.
 4. Nema varanja

Simetrija, sparivanje i kopiranje

1. **A** i **B** svaki ima neograničenu zalihu identičnih kovanica. **A** i **B** naizmjenice postavljaju kovanice na konačni kvadratni stol, na takav način da se nikoje dvije kovanice ne preklapaju i svaka kovanica je u potpunosti na stolu (tj. ne "viri vani"). Osoba koja ne može legalno postaviti kovanicu je izgubila. Pretpostavljajući da se barem jedna kovanica može staviti na stol, dokaži da **A** ima pobjedničku strategiju.
2. Prirodan broj n produkt je k različitih prostih brojeva ($k \geq 3$). **A** i **B** igraju naizmjenice tako da zapisuju složene djelitelje od n na ploču po sljedećim pravilima. Nitko ne smije napisati n . Također, nikada se u nizu ne smiju pojaviti relativno prosti brojevi ili neka dva broja t. d. jedan dijeli drugoga. Prvi igrač koji ne može odigrati potez je izgubio. Ako **A** igra prvi, tko ima pobjedničku strategiju?
3. **A** i **B** igraju igru na ploči 6×6 . Potez se odvija tako da igrač bira racionalan broj koji se još ne pojavljuje na ploči i zapisuje ga na prazni kvadrat ploče. **A** igra prvi i igrači se izmjenjuju. Kada su svi kvadrati popunjeni, u svakom retku, kvadrat s najvećim brojem u redu se boji u crnu boju. **A** pobjeđuje ako se može kretati od vrha do dna ploče (dolje, dolje desno i dolje lijevo) samo po crnim kvadratima, a **B** pobjeđuje ako ne može. Pronađi, s dokazom, pobjedničku strategiju za nekog od igrača.
4. (Križić - kružić na steroidima) Na 5×5 ploči, **A** i **B** igraju naizmjenice označavajući kvadrate. **A** uvijek upisuje X u kvadrat i **B** upisuje O. Niti jedan kvadrat ne može se označiti dvaput. **A** pobjeđuje ako cijeli redak, stupac ili neku od dvije dijagonale može cijelu ispuniti X-evima. Može li **B** spriječiti **A** da pobijedi?
5. **A** i **B** igraju naizmjenice na 5×5 ploči. **A** uvijek upisuje 1 u prazni kvadrat, a **B** 0. Kada je ploča popunjena, računa se suma u svakoj od 9 3×3 ploča i **S** je **A**-ov rezultat pri čemu je **S** najveća od takvih suma. Koji je najveći rezultat koji **A** može dobiti, unatoč savršenoj igri **B**-a.

Sparivanje bazirano na parnosti

6. **A** i **B** igraju sljedeću igru. Najprije **A** zapiše permutaciju brojeva od 1 do n , gdje je $n > 1$ fiksni prirodni broj. U svakom potezu igrač mora napisati niz brojeva koji se nije već pojavio t. d.:

- (a) Niz je permutacija niza koji je napisao prethodni igrač, ILI
- (b) Niz je dobiven brisanjem jednog broja iz niza prethodnog igrača.

Na primjer, ako **A** prvi napiše 4123, **B** može zapisati 3124 ili 413. Prvi igrač koji ne može zapisati niz je izgubio. Odredi tko ima pobjedničku strategiju.

7. Igra se odvija na ploči 1×2000 . Dva igrača u svakom potezu zapisuju S ili O u prazni kvadrat. Prvi igrač koji uspije formirati tri susjedna kvadrata tako da na njima piše SOS pobjeđuje. Ako su sve kutije ispunjene bez da igdje piše SOS, tada je remi. Dokaži da igrač koji igra drugi po redu ima pobjedničku strategiju.

Analiza pozicija

8. **A** i **B** igraju igru. Najprije **A** kaže 1, 2 ili 3. Tada **B** može nadodati 1, 2 ili 3 na broj koji je **A** rekao. Igra se odvija naizmjenice, u svakom potezu nadodavajući 1, 2 ili 3 na prethodni broj. Igrač koji prvi dođe do 100 pobjeđuje. Tko ima pobjedničku strategiju? ako su igrači mogli dodavati 1, 2, ... k , u svakom potezu, i ako trebaju doći do n , odredi pobjedničke strategije od **A** i **B** ovisno o n .
9. U $m \times n$ pravokutnoj šahovskoj ploči, kamen se nalazi u donjem lijevom kutu. **A** i **B** pomiču kamen naizmjenice. U svakom koraku, kamen se može pomaknuti desno ili gore proizvoljan broj kvadrata. Pobjednik je onaj koji kamen pomakne u gornji desni kut. Pronađi sve (m, n) za koje **A** ima pobjedničku strategiju.
10. Broj 1,000,000 napisan je na ploči. **A** i **B** naizmjenice igraju, pri čemu se u svakom potezu n koji piše na ploči zamijeni s $n - 1$ ili $\lfloor (n + 1)/2 \rfloor$. Igrač koji prvi napiše 1 je pobijedio. Tko ima pobjedničku strategiju?
11. Na stolu se nalazi $N > n^2$ kamenja. **A** i **B** igraju igru. U svakom koraku igrač može s ploče maknuti k kamenja, gdje je k prirodan broj ili manji od n ili je višekratnik od n . Igrač koji uzme posljednji kamen je pobijedio. Dokaži da **A** ima pobjedničku strategiju.
12. **A** i **B** naizmjenice zapisuju broj. Neka je N fiksni prirodan broj. Najprije **A** zapisuje broj 1, onda **B** zapisuje 2. Od sada, u svakom potezu, ako je k trenutni broj, tada igrač čiji je potez može ili zapisati $k + 1$ ili $2k$, ali nitko ne smije zapisati broj veći od N . Igrač koji zapiše N pobjeđuje. Za svaki N , odredi tko ima pobjedničku strategiju.

Hintovi

- 1. Tekst
- 2. Tekst
- 3. Tekst
- 4. Tekst
- 5. Tekst
- 6. Tekst
- 7. Tekst
- 8. Tekst
- 9. Tekst

Rješenja

Svi zadatci su iz knjige **Olympiad Combinatorics** autora Pranav A. Srirama. Poglavlje o kombinatornim igrama je na sljedećem linku: <https://euclid.ucc.ie/mathenr/IMOTraining/CombinatoricsChapter5%20Games%20Aug%202014.pdf>. Link u hijerarhiji iznad sadrži dosta kvalitetnih materijala za pripremu za natjecanja: <https://euclid.ucc.ie/mathenr/IMOTraining>. Na tom linku postoje ostala poglavlja navedene knjige iz koje su obrađene teme koje se često pojavljuju na natjecanjima, a zadatci su detaljno objašnjeni i ne zahtijevaju predznanje.