S+J	miješana grupa

Predavanja subotom
Osijek, sezona 2019./2020.

Geometrija miks

Tea Arvaj

22.02.2020.

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

mnm.hr Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić" matematicari.mnm

Uvod

Zrcaljenja ortocentra leže na opisanoj kružnici
Neka je H ortocentar trokuta ABC. Neka je X zrcaljenje od H preko BC i neka je Y zrcaljenje od H preko polovišta od BC. Tada X i Y obje leže na opisanoj kružnici od ΔABC. Nadalje, AY je promjer opisane kružnice.

Simedijana
Neka je ABC trokut i Γ njegova opisana kružnica. Neka je D presjek tangenti u B i C na kružnicu. Tada se AD podudara sa simedijanom od ΔABC. (Simedijana je zrcalna slika težišnice = medijane, s obzirom na simetralu kuta pri čemu se sva 3 pravca sijeku u istom vrhu trokuta.)

Promjer upisane kružnice
Neka upisana kružnica ΔABC dodiruje stranicu BC u D i neka je DE promjer kružnice. Neka AE siječe BC u F. Vrijedi: $|BD| = |CF|$.

Spiralna sličnost
Neka su AB i CD dvije dužine i neka se AC i BD sijeku u X. Neka se opisane kružnice trokuta ABX i CDX ponovno sijeku u O. Tada je O središte spiralne sličnosti koja šalje AB u CD. (Spiralna sličnost je homotetija i rotacija pri čemu se obje transformacije vrše oko istog središta).

Lakši zadaci

1. Dva okomita pravca sijeku stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ kvadrata $ABCD$ redom u točkama E, F, G, H. Dokažite da je $|EG| = |HF|$.

2. U pravokutnom trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C, N je nožište visine na hipotenuzu.
Dokažite da vrijedi $|CN| = \sqrt{|AN| \cdot |BN|}$, $|BC| = \sqrt{|AB| \cdot |BN|}$ i $|AC| = \sqrt{|AB| \cdot |AN|}$

3. Zadan je kut $\sphericalangle A$ i točka M unutar kuta. Točkama A i M prolazi bilo koja kružnica, koja krakove zadanog kuta siječe u točkama P i Q. Dokažite da omjer $|MP| : |MQ|$ ne ovisi o izboru kružnice.

4. Iz vrha A paralelograma $ABCD$ spuštene su okomice $\overline{AM}$ i $\overline{AN}$ na pravce BC i CD. Dokažite da $\triangle ABC \sim \triangle AMN$.

5. U šiljastokutnom trokutu ABC u kojem je $|AB| < |AC|$, točka D leži na stranici BC. Okomica iz točke B na pravac AD siječe kružnicu opisanu trokutu ABD u točkama B i E. Ako su pravci DE i AC međusobno okomiti, dokažite da je AD simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.

Teži lakši zadaci

6. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Označimo s P polovište dužine $\overline{AC}$. Dokažite da je $|DM| = 2|BP|$.

7. Zadan je pravac p i na njemu točke A, B, C i D (u tom poretku). Točkama A i B povuku se dvije usporednice, a točkama C i D druge dvije usporednice koje sijeku prve dvije i čine paralelogram. Dokažite da sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p ne ovise o izboru usporednica kroz A i B, odnosno C i D.

Angle chase zadaci

8. Na kružnici k nalaze se točke A i B, a na manjem luku AB točka P. Neka su Q i R točke na k, različite od P, takve da je $|AP| = |AQ|$ i $|BP| = |BR|$. Neka je T sjecište pravaca AR i BQ. Dokaži da su pravci PT i AB međusobno okomiti.

9. U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD > 90°$. Neka su E, F i G nožišta okomica iz vrha C na pravce AB, BD i DA, redom, i H sjecište dijagonala paralelograma $ABCD$. Dokažite da točke E, F, G i H leže na istoj kružnici.

10. Dan je tetivni peterokut $ABCDE$. Neka su točke F, G, H i I polovišta dužina BC, CD, DE i EA, redom. Neka se pravci FG i HI sijeku u točki J, a pravci AC i HI u točki K. Dokazati da se točka K nalazi na kružnici opisanoj trokutu FCJ.

11. Kružnica upisana u ABC dodiruje stranice BC, CA i AB u točkama D, E i F, redom. Neka je točka K sa iste strane pravca EF kao i točka A, takva da vrijedi $\sphericalangle KFE = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle KEF = \sphericalangle ABC$. Dokažite da vrijedi $KD \perp BC$.

12. Upisana kružnica dodiruje stranice AB i AC trokuta ABC u točkama M i N. Neka je P sjecište pravca MN i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Dokažite da je $BP \perp CP$.

Zrcaljenja ortocentra

13. Dan je trokut ABC. Dokaži da polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužina koje spajaju vrh s ortocentrom leže na istoj kružnici.

Simedijana

14. Neka je ABC trokut s $AC = BC$ i P točka unutar trokuta t. d. $\angle PAB = \angle PBC$. Ako je M polovište od AB, dokaži da je $\angle APM + \angle BPC = 180°$

15. Tri različite točke A, B i C fiksirane su na pravcu p ovim redom. Neka je Γ kružnica kroz A i C čije središte ne leži na pravcu p. Neka je P sjecište tangenti na kružnicu Γ u točkama A i C. Pretpostavimo da Γ siječe dužinu $\overline{PB}$ u Q. Dokaži da sjecište simetrale $\angle AQC$ i AC ne ovisi o izboru Γ.

Promjer upisane kružnice

16. U ravnini neka je Γ kružnica, l tangenta na kružnicu Γ i M točka na l. Odredi skup svih točaka P sa sljedećim svojstvom: postoje 2 točke Q i R na l t. d. je M polovište QR i Γ je upisana kružnica ΔPQR.

17. U ΔABC koji zadovoljava $AC + BC = 3AB$, upisana kružnica sa središtem I dodiruje BC i CA redom u D i E. Neka su K i L centralnosimetrične točkama D i E s obzirom na I. Dokaži da je $ABLK$ tetivan.

Spiralna sličnost

18. Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut takav da:

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \quad i \quad \angle CBA = \angle DCA = \angle EDA.$$

Dijagonale BD i CE sijeku se u P. Dokaži da AP raspolavlja CD.