

Teža simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

20. listopada 2020.

1. Dokažite da se za svaki $n \geq 5$, brojevi $1, 2, \dots, n$ mogu raspodijeliti u dvije grupe takve da je suma elemenata u jednoj grupi jednaka umnošku elemenata druge grupe

2. Dokažite da za sve realne brojeve x, y, z vrijedi

$$\frac{y^2 - x^2}{2x^2 + 1} + \frac{z^2 - y^2}{2y^2 + 1} + \frac{x^2 - z^2}{2z^2 + 1} \geq 0.$$

3. Pronađi sve proste brojeve p i prirodne brojeve n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$p(p - 1) = 2(n^3 - 1).$$

4. Na kružnici je nasumično postavljeno n bijelih i n crnih kuglica. Počevši od proizvoljne bijele kuglice, u smjeru kazaljke na satu sve bijele kuglice su redom označene brojevima $1, 2, \dots, n$. Na isti način su i sve crne kuglice označene brojevima $1, 2, \dots, n$ u smjeru suprotno od kazaljke na satu. Dokaži da postoji niz od n uzastopnih kuglica koje su označene brojevima $\{1, 2, \dots, n\}$ u nekom redoslijedu.

5. Dan je $\triangle ABC$ i točka A' simetrična točki A s obzirom na stranicu BC . Neka su P i Q točke na stranicama AB i AC , redom, takve da je $PA' = PC$ i $QA' = QB$. Dokaži da okomica iz A' na PQ prolazi središtem opisane kružnice $\triangle ABC$.

Piše se 4 sata.