

Lakša simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

20. listopada 2020.

1. Riješi jednadžbu

$$1 + x_1 + 2x_1x_2 + \cdots + (n-1)x_1x_2 \cdots x_{n-1} = x_1x_2 \cdots x_n$$

za različite prirodne brojeve $x_1, x_2, \dots, x_n$.

2. Dan je trokut $\triangle ABC$ s ortocentrom H . Neka je M polovište stranice BC , a D drugo sjecište pravca AM i opisane kružnice ABC . Neka je E centralno simetrična slika točki D s obzirom na M .

Dokažite da je pravac HE okomit na pravac AM .

3. Na ploči je napisano 2020 prirodnih brojeva. Svaku minutu, na ploču dopišemo novi red brojeva na sljedeći način. Ispod svakog broja a u prethodnom redu napišemo broj $f(a)$ gdje $f(a)$ predstavlja broj pojavljivanja broja a u prethodnom redu. Dokažite da ćemo u nekom trenutku, jedan za drugim, napisati isti red brojeva.

4. Pronađite sve realne brojeve a i b koji zadovoljavaju relaciju

$$2(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a + 1)(b + 1)(ab + 1).$$

5. Za koje prirodne brojeve m i n se pravokutnik dimenzija $m \times n$ može popločati (bez preklapanja) figurama sastavljenih od jediničnih kvadrata kao na slici?

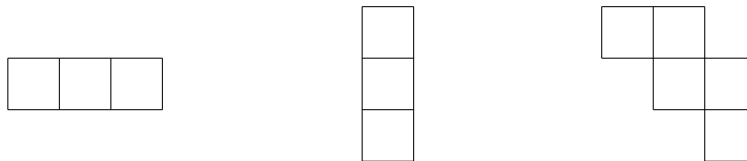


Figure se ne mogu rotirati ili zrcaliti.

Pisati 4 sata.