Lakša simulacija državnog natjecanja 2020.

Mladi nadareni matematičari Marin Getaldić

20. listopada 2020.

1. Riješi jednadžbu

$$1 + x_1 + 2x_1x_2 + \cdots + (n-1)x_1x_2\cdots x_{n-1} = x_1x_2\cdots x_n$$

za različite prirodne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$.

2. Dan je trokut $\triangle ABC$ s ortocentrom H. Neka je M polovište stranice BC, a D drugo sjecište pravca AM i opisane kružnice ABC. Neka je E centralno simetrična slika točki D s obzirom na M.

Dokažite da je pravac HE okomit na pravac AM.

3. Na ploči je napisano 2020 prirodnih brojeva. Svaku minutu, na ploču dopišemo novi red brojeva na sljedeći način. Ispod svakog broja a u prethodnom redu napišemo broj $f(a)$ gdje $f(a)$ predstavlja broj pojavljivanja broja a u prethodnom redu. Dokažite da ćemo u nekom trenutku, jedan za drugim, napisati isti red brojeva.

4. Pronađite sve realne brojeve a i b koji zadovoljavaju relaciju

$$2(a^2+1)(b^2+1) = (a+1)(b+1)(ab+1).$$

5. Za koje prirodne brojeve m i n se pravokutnik dimenzija $m \times n$ može popločati (bez preklapanja) figurama sastavljenih od jediničnih kvadrata kao na slici?

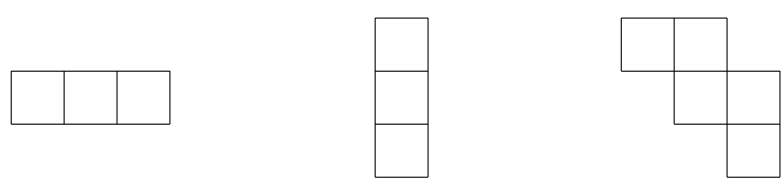


Figure se ne mogu rotirati ili zrcaliti.

Pisati 4 sata.

1. Prije svega, uočimo da nećemo baš tako jednostavno pristupiti zadatku kao standardnoj jednadžbi. Naime, imamo nehomogenu jednadžbu pa stvari poput faktorizacija neće upaliti.

Uočimo da je jednadžba zadana u prirodnim brojevima. Prirodni brojevi se razlikuju od realnih po tome što na njima možemo uvesti relaciju dijeljenja i uz pomoć djeljivosti rješavati zadatke. Tako imamo da x_1 dijeli desnu stranu jednadžbe pa mora dijeliti i lijevu stranu, odnosno,

$$x_1 \mid 1 + x_1 + 2x_1x_2 + \cdots + (n-1)x_1x_2 \cdots x_{n-1},$$

to jest,

$$x_1 \mid 1 + x_1(1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_2 \cdots x_{n-1}) \implies x_1 \mid 1 \implies x_1 = 1.$$

Kada to uvrstimo nazad u početnu jednadžbu, dobivamo

$$1 + 1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_2 \cdots x_{n-1} = x_2x_3 \cdots x_n.$$

Istim načinom zaključivanja, dobivamo da $x_2 \mid 2$, a kako $x_2 \neq x_1 = 1$, vrijedi $x_2 = 2$. Nastavljanjem istog postupka (raspišite si za x_3 i argumentirajte zašto uvijek ispada $x_i = i$) dobivamo da je $x_j = j$ za svaki prirodni broj j iz $\{1, 2, \ldots, n\}$.

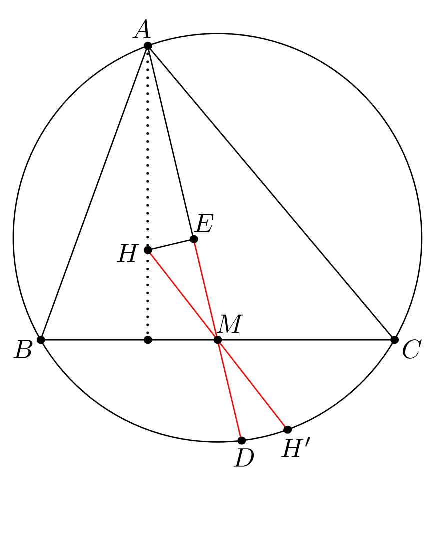
2. Slijedimo skicu. Sjetimo se jedne korisne leme iz prvih sati geometrije na dodatnima.

Lemma (Preslika ortocentra preko polovišta stranice)

Preslika od H preko M leži na opisanoj kružnici od $\triangle ABC$. Ta točka je dijametralno suprotna točki A s obzirom na kruznicu (ABC).

Ukoliko se ne sjećate same leme predlažem vam da bacite oko na prošlogodišnje predavanje *Ortocentar*. Ova lemma će nam sasvim sigurno vrlo dobro doći jer u postavci zadatka već imamo da je E centralno simetrična slika točke D preko M.

Označimo presliku ortocentra s H'. Iz prethodno navedenog možemo zaključiti da su $\triangle MEH$ i $\triangle MDH'$ sukladni te da je $HE||DH'$



Koristeći činjenicu da je H' dijametralno suprotna točki A, to jest da je AH' promjer opisane kružnice, možemo zaključiti da je $\angle ADH'$,kao kut nad promjerom, pravi kut. Dakle pravac DH' je okomit na AD, kako je HE paralelan s DH' imamo da je HE i okomit na AD.

3. Pokušajmo prvo ’igrati igru’ na malim primjerima. Recimo da imamo sedam brojeva i krećemo s brojevima $20, 20, 15, 15, 15, 3, 7$.

20	20	15	15	15	3	7
2	2	3	3	3	1	1
2	2	3	3	3	2	2
4	4	3	3	3	4	4
4	4	3	3	3	4	4

Uočimo nekoliko stvari. Prije svega, svaki od brojeva od 2. retka nadalje je manji od 8. Naime, to je sasvim jednostavno dokazat, naime, svaki od tih brojeva predstavlja broj pojavljivanja u prethodnom retku, a kako je ukupan broj brojevs 7, ne može biti više od 7 pojavljivanja.

Druga stvar koju treba uočiti jest da od drugog retka nadalje, brojevi unutar svojih ’stupaca’ rastu ili ostaju isti. Naime, s obzirom da broj predstavlja broj pojavljivanja nekog broja k u prethodnom retku, znamo da će se ispod svakog pojavljivanja broja k naći isti takav broj. Kako je tih pojavljivanja točno onoliko koliki je broj, on se sigurno neće smanjiti.

Sada se možemo vratiti na postavku s 2020 brojeva. Uočimo da se od drugog retka nadalje, u svakom retku nalaze brojevi koji su nužno manji od 2021, a u svakom koraku se povećaju ili ostanu isti. Kako ne mogu neograničeno rast (jer manji su od 2021), nužno je da u nekom trenutku svi ti brojevi ostanu isti, odnosno, tvrdnja je dokazana.

4. Najčešći pristup nekoj zadanoj relaciji je pokušaj faktoriziranja kako bi se jednadžba pojednostavnila, no ono što je sumnjivo u ovom zadatku je to što je zadana relacija već sama po sebi ”sređena”. Faktorizirana je u dijelove koji se ne mogu dalje cijepati, i upravo zbog te ”sređenosti” je dosta lako pronaći jedno rješenje poput $(a, b) = (1, 1)$.

Uočimo da su nepoznanice na lijevoj strani pod kvadratima. Načelno (naravno, ne uvijek) u nejednakostima, ’individualne’ varijable su puno ’jače’ od ’miješanih’. Ono što time želim reći jest da ako imate neki izraz koji je suma n-tih potencija, uglavnom će on biti veći od produkta tih istih varijabli takvih da sveukupno imaju stupanj n. Na primjer, vrijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

Korisno je pokušati iskoristiti neke od poznatih nejednakosti kako bismo dokazali da je lijeva strana veća ili jednaka desnoj. Tada bi nam rješenja jednadžbe proizašla iz uvjeta jednakosti svih nejednakosti koje smo koristili.

Zato je dobro imati na umu već poznato rješenje $(1,1)$, koje ukazuje koliko "jake" nejednakosti trebamo koristiti. Primjerice najjednostavnija nejednakost kojem je $a = 1$ uvjet jednakosti je $(a-1)^2 \geq 0$. Tu nejednakost možemo postepeno preobličavati u oblik koji se pojavljuje u zadatku na sljedeći način:

$$(a-1)^2 \geq 0 \iff a^2+1 \geq 2a \iff 2(a^2+1) \geq (a+1)^2$$

Množeći s istom nejednakosti za nepoznanicu b dobivamo:

$$(a^2+1)(b^2+1) \geq \frac{1}{4}(a+1)^2(b+1)^2 \tag{1}$$

Ha, dobro $\cdots$ a što je s $(ab+1)$ pitate se? Kako bismo $(a^2+1)(b^2+1)$ povezali s $(ab+1)$? Srećom postoji CSB nejednakost koja je upravo ono što nam treba

$$((a)^2+1^2)((b)^2+1^2) \geq (ab+1)^2 \tag{2}$$

Zbrojimo li (1) i (2) te na njih primjenimo AG nejednakost dobivamo

$$2(a^2+1)(b^2+1) \geq \frac{1}{4}(a+1)^2(b+1)^2 + (ab+1)^2 \geq (a+1)(b+1)(ab+1).$$

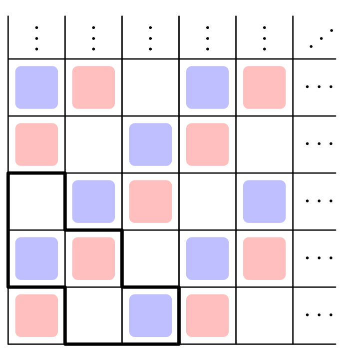
Što pokazuje je lijeva strana jednakosti veća ili jednaka od desne, potičem vas da provjerite da je slučaj jednakosti u svim nejednakostima koje smo koristili upravo riješenje $(a,b) = (1,1)$, te time da utvrdite da je $(1,1)$ uistinu jedino riješenje jednadžbe.

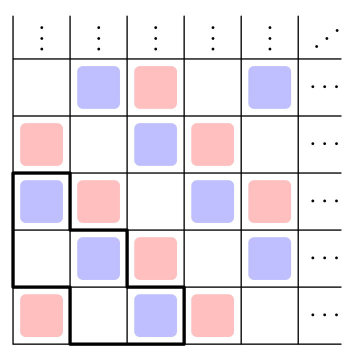
Naravno, postoji još jedno rješenje zadatka, potencijalno jednostavnije, no, puno manje poučno. Naime, jednadžbu možemo razmnožiti i promatrati kao kvadratnu jednadžbu u a ili u b te promatrajući diskriminantu, možemo doći do rješenja. S obzirom da je to rješenje uglavnom 'mehanički', ovdje ga neću navoditi.

5. Jasno je da za tablice oblika $3 \times n$ i $m \times 3$ postoji popočavanje sa pločama 1×3 i 3×1, dakle tablica gdje su ili m ili n djeljivi sa 3 se sigurno mogu popločati. Matematički onda možemo zapisati dovoljan uvjet

$$mn \equiv 0 \pmod 3.$$

Dokažimo da je taj uvjet ujedno i nužan. Cilj nam je napraviti neko bojanje koje bi bilo invarijantno modulo neki broj, ploče 3×1 i 1×3 su simetrične po dijagonali, stoga je logično da će nam i bojanje biti simetrično po dijagonali. Kako ploče 3×1 i 1×3 imaju po 3 kvadratića nije za očekivati da ćemo koristiti više od 3 boje.





Treća pločica,koju ćemo zvati W pločica je dosta jedinstvena po strukturi, "ružna" reklo bi se, pa ćemo naše bojanje uvelike ravnati po njoj. Neka su x, y, z brojevi u poljima 1×3 ploče s kojima bojimo tablicu. Želimo da $x + y + z \equiv 0 \pmod{p}$

Ako bojamo iz donjeg lijevog prema gornjem desnom kutu kao na lijevoj slici, W ploča bi nam dala neku od cikličnih varijacija jednadžbe

$$2x + 2y + z \equiv 0 \pmod{p}$$

sve zajedno impliciraju $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{p}$ što nam ne daje baš interesantno bojanje.

Ako pak bojamo kao na desnoj slici, dobili bismo neku od cikličnih $3x + 2y \equiv 0 \pmod{p}$ ubacivanjem $x + y + z \equiv 0 \pmod{p}$ dobijamo sljedeće tri kongruencije

$$x + 2z \equiv 0 \pmod{p}, \quad y + 2x \equiv 0 \pmod{p}, \quad z + 2y \equiv 0 \pmod{p}$$

koje se mogu sažeti u

$$z \equiv 2y \equiv 4x \equiv 0 \pmod{p}$$

Sada dolazi faza trazenja broja p , ako smo dobro upoznati sa potencijama broja 2 iliti $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ možemo uočiti da ako ih gledamo modulo 7 dobijamo niz $1, 2, 4, 1, 2, \ldots$.

Odaberemo li $p = 7$ i $x = 1, y = 2$ i $z = 4$ te bojanje po slici 2, suma polja u svakoj od ploča 1×3, 3×1 i W će biti djeljiva sa 7. Time i suma polja u cijeloj tablici mora biti djeljiva sa 7 ako je tu tablicu moguće popločati sa danim pločicama.

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
2	4	1	2	4	$\cdots$
1	2	4	1	2	$\cdots$
4	1	2	4	1	$\cdots$
2	4	1	2	4	$\cdots$
1	2	4	1	2	$\cdots$

Uočimo da su polja u tablici obojana kao potencije broja dva koje smo zatim reducirali modulo 7, tačnije u polju s kordinatama (i, j) je broj $2^{i+j} \pmod{7}$. Neka je S ukupna suma polja, imamo da je

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} 2^{i+j} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \sum_{j=0}^{m-1} 2^j = (2^n - 1)(2^m - 1)$$

Dakle $7 \mid S \implies 7 \mid (2^n - 1)(2^m - 1)$ odnosno 7 dijeli $2^n - 1$ ili $2^m - 1$ a

$$2^k \equiv 1 \pmod{7} \iff k \equiv 0 \pmod{3}$$

što znači da $3 \mid mn$ kao što smo i htjeli.