

Teža simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

20. listopada 2020.

1. Dokažite da se za svaki $n \geq 5$, brojevi $1, 2, \dots, n$ mogu raspodijeliti u dvije grupe takve da je suma elemenata u jednoj grupi jednaka umnošku elemenata druge grupe.
2. Dokažite da za sve realne brojeve x, y, z vrijedi

$$\frac{y^2 - x^2}{2x^2 + 1} + \frac{z^2 - y^2}{2y^2 + 1} + \frac{x^2 - z^2}{2z^2 + 1} \geq 0.$$

3. Pronađi sve proste brojeve p i prirodne brojeve n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$p(p - 1) = 2(n^3 - 1).$$

4. Na kružnici je nasumično postavljeno n bijelih i n crnih kuglica. Počevši od proizvoljne bijele kuglice, u smjeru kazaljke na satu sve bijele kuglice su redom označene brojevima $1, 2, \dots, n$. Na isti način su i sve crne kuglice označene brojevima $1, 2, \dots, n$ u smjeru suprotno od kazaljke na satu. Dokaži da postoji niz od n uzastopnih kuglica koje su označene brojevima $\{1, 2, \dots, n\}$ u nekom redoslijedu.
5. Dan je $\triangle ABC$ i točka A' simetrična točki A s obzirom na stranicu BC . Neka su P i Q točke na stranicama AB i AC , redom, takve da je $PA' = PC$ i $QA' = QB$. Dokaži da okomica iz A' na PQ prolazi središtem opisane kružnice $\triangle ABC$.

Piše se 4 sata.

1. Nazovimo skup sa pribrojnicima S , i skup sa faktorima P .

Igrajmo se na slučaju $n = 5$, možda bismo mogli iskoristiti činjenicu da je $2 \cdot 4 = 8 = 5 + 3$ i podjela na skupove $S = \{3, 5\}$ i $P = \{1, 2, 4\}$ uistinu radi

Intuicija nam govori da skup P uopće ne treba toliko puno elemenata, pa pokušajmo pokriti skup P sa elementima $1, a$ i b koje ćemo sada otkriti. Dakle

$$\prod_{p \in P} p = \sum_{s \in S} s$$

$$1 \cdot a \cdot b = 1 + 2 + \dots + n - 1 - a - b$$

$$ab + a + b + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(a+1)(b+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Sada možemo odabrati a, b u ovisnosti o parnosti broja n . Ukoliko je n paran odaberimo $a = \frac{n}{2} - 1$ i $b = n$. A ukoliko je n neparan odaberimo $a = \frac{n-1}{2}$ i $b = n - 1$. Ova konstrukcija očito zadovoljava uvjete zadatka za sve $n \geq 5$, čime smo pokazali da se svaki skup $\{1, 2, \dots, n\}$ može pocepiti na traženi način.

2. Prije svega, uočimo da uglavnom ne poznajemo niti jednu nejednakost u kojoj nešto ima negativan predznak. Zbog toga nam je cilj riješiti se minusa, na koji god način znamo. Naravno, pojavljuje se jedan jako prirodan način, a to je svaki od pribrojnika pomnožimo s dva, a nakon toga dodamo jedan. Nakon prvog koraka, imamo nejednakost

$$\frac{2y^2 - 2x^2}{2x^2 + 1} + \frac{2z^2 - 2y^2}{2y^2 + 1} + \frac{2x^2 - 2z^2}{2z^2 + 1} \geq 2 \cdot 0 = 0,$$

a nakon drugog koraka, imamo

$$\frac{2y^2 + 1}{2x^2 + 1} + \frac{2z^2 + 1}{2y^2 + 1} + \frac{2x^2 + 1}{2z^2 + 1} \geq 3.$$

Naravno, u ovom trenutku se prirodno nameće AG nejednakost (zbog toga što je produkt brojnika jednak produktu nazivnika) to jest, vrijedi

$$\frac{2y^2 + 1}{2x^2 + 1} + \frac{2z^2 + 1}{2y^2 + 1} + \frac{2x^2 + 1}{2z^2 + 1} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2y^2 + 1}{2x^2 + 1} \cdot \frac{2z^2 + 1}{2y^2 + 1} \cdot \frac{2x^2 + 1}{2z^2 + 1}} = 3.$$

3. Uočimo da s lijeve strane imamo $\approx p^2$, a zdesne $\approx n^3$. Zato sigurno možemo ocijeniti veličinu p u odnosu na n .

Naime, trivijalno imamo $p > p - 1$ pa vrijedi

$$(p-1)^2 < \underbrace{p(p-1)}_{=2(n^3-1)} < p^2$$

odnosno

$$p - 1 < \sqrt{2(n^3 - 1)} < p.$$

Sada se iz ovih jednađbi lako dobija da vrijedi $p > 2n$ (uvjerite se sami).

Kako p dijeli lijevu stranu jednađbe, onda mora dijeliti i desnu stranu jednađbe, odnosno,

$$p \mid 2(n^3 - 1) = 2(n - 1)(n^2 + n + 1).$$

Naravno, kako je $p > 2n$, znamo da $p \nmid 2(n - 1)$ pa imamo $p \mid n^2 + n + 1$, to jest, $n^2 + n + 1 = kp$ za neki prirodni broj k . Ako to vratimo u početnu jednađbu, dobivamo

$$p - 1 = 2k(n - 1) \implies p = 2k(n - 1) + 1 \implies n^2 + n + 1 = kp = 2k^2(n - 1) + k.$$

Nakon manjeg sređivanja, dobivamo

$$(n - 1)(n + 2) + 3 = 2(n - 1)k^2 + k,$$

odnosno, kako $n - 1$ dijeli sve pribrojнике osim $k - 3$, mora dijeliti i $k - 3$.

Sada ostaju dva slučaja, $k = 3$ ili $n - 1 \leq k - 3$.

Ako je $n - 1 \leq k - 3$, dobivamo $k \geq n + 2$, odnosno, kako je $p > 2n$,

$$n^2 + n + 1 = kp > 2n(n + 2).$$

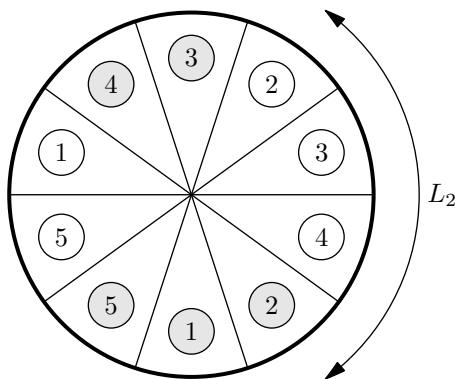
Rješavanjem ove nejednađbe, vidimo da nema rješenja (provjerite).

U drugom slučaju, imamo $k = 3$ pa vrijedi $n^2 + n + 1 = 3p$ te $p = 6(n - 1) + 1$ za što se opet lagano provjeri da nema rješenja (provjerite!!).

Naposljetku, kako smo završili sve slučajeve, znamo da jednađba nema rješenja.

4. Neka b_i i c_i redom označavaju bijele i crne kuglice označene brojem i gdje je $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Posmatrajmo za svaki i kružni luk L_i (skup), gledajući u smjeru kazaljke na satu, koji počinje "neposredno poslije b_i " i završava "neposredno prije c_i ".



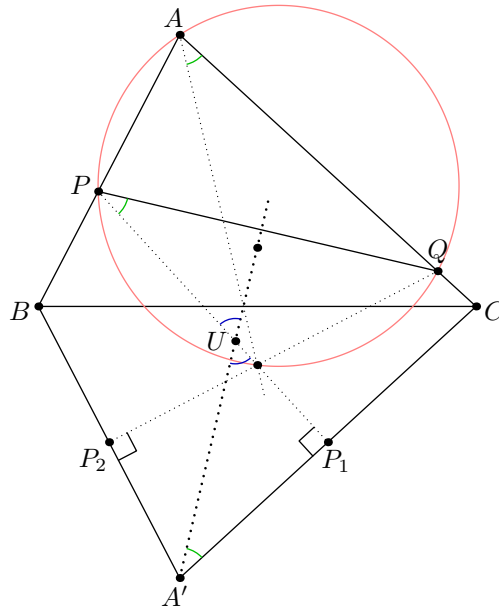
Ako osjetite da nemate kontrolu nad elementima zadatka, pored raznih načina sistematizacije (kao što je u ovom slučaju skup L_k), dosta je korisno prizvati upomoć princip ekstrema. To jest posmatrati određeni skup koji je maksimalan ili minimalan po određenom kriteriju, jer će takav skup vrlo često davati dodatna ograničenja koja se mogu pokazati korisnim. U ovom slučaju iz odabira minimalnog skupa L_k će proizaći dva niza, jedan bijeli, jedan crni čiji su skupovi indeksa disjunktni. Ajmo vidit zašto je takvo nešto korisno...

Pretpostavimo da je najmanji od kružnih lukova L_k (dakle onaj koji sadrži najmanje elemenata). Sve kuglice u skupu L_k moraju biti iste boje, u protivnom bi i b_{k+1} , i c_{k+1} bili elementi skupa L_k odnosno L_{k+1} bi bio sadržan u skupu L_k što bi se suprotstavljalo minimalnom odabiru skupa L_k . Neka je boja elemenata u odabranom luku bez smanjenja općenitosti bijela.

Ukoliko sada uzmemo kružni luk duljine n koji počinje neposredno poslije kuglice b_k , on će sadržati bijele kuglice poredane po rastućim oznakama počevši od b_{k+1} dok će crne kuglice sadržati po padajućim oznakama počevši od c_k . Dakle ukoliko ima m bijelih kuglica u disku, to će biti kuglice $b_{k+1}, \dots, b_{k+m}$ dok će crnih biti $n - m$ a to su $c_k, c_{k-1}, \dots, c_{k-n+m+1}$ gdje sve indekse gledamo modulo $2n$.

Može izgledati smiješno, kako se zadatak samo "raspao". Ako malo razmislite činjenica da je najmanji L_k isključivo u jednoj boji (npr. bijeloj) ne dozvoljava da se c_{k+1} pojavi poslije b_k , tj. ne dozvoljava ponavljanje indeksa $k + 1$, b_{k+1} i c_{k+1} u ovom slučaju. Bez posmatranja ekstrema ne bismo mogli dobiti dva disjunkta niza indeksa koji nam trebaju da bismo upotpunili skup $\{1, 2, \dots, n\}$.

5. Slijedimo skicu.



Pokušajmo povezati skicu u neku smislenu cjelinu. Naime, sve točke definirane u zadatku imaju neku smislenu definiciju, no, nije ih nužno jednostavno povezati jedne s drugima. Naime, P i Q praktički da nemaju nikakve povezanosti s trokutom

$\triangle ABC$, odnosno, promatrajući isključivo iz konteksta trokuta $\triangle ABC$ (dakle, bez A'), točke P i Q nemaju neku karakterizaciju koja bi nam olakšala baratanje s njima.

Zbog toga se moramo okrenuti načinu na koji su te točke konstruirane. Naime, uvjet u zadatku nam govori da su točke P i Q jednako udaljene od A' i C , odnosno, A' i B . To znači da se nalaze na simetrali stranica $A'C$ i $A'B$ trokuta $\triangle A'BC$. Sada u zadatak ima smisla uvesti točke P_1 i P_2 kao polovišta stranica $A'C$ i $A'B$ te uočavamo da je njihov presjek središte opisane kružnice trokutu $\triangle A'BC$.

Nadalje, kako je $\triangle A'BC$ samo preslika trokuta $\triangle ABC$ preko pravca BC , zaključujemo da su onda i središta opisanih kružnica tim trokutima, O i O' preslike jedna druge preko BC .

Ono što lagano uočavamo jest da je četverokut $A'P_1O'P_2$ tetivan. Naime, ima dva nasuprotna prava kuta kojima je zbroj očito 180° . Zbog toga vrijedi

$$\angle PO'Q = \angle P_1O'P_2 = 180 - \angle P_1AP_2 = \angle BAC,$$

a zbog prethodne jednadžbe vrijedi da je četverokut $APO'Q$ tetivan (suma nasuprotnih kuteva je ispruženi).

Naposljetku, preostaje za dokazati tvrdnju zadatka, no, uočavamo sljedeće. Kako su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'BC$ preslika jedan drugom preko BC , onda su kutevi $\angle CAO$ i $\angle CAO'$ jednaki. Nadalje, zbog tetivnosti imamo $\angle O'PQ = \angle O'AQ$. Također, imamo da su kutevi $\angle PUO$ i $\angle A'UP_1$ vršni pa imamo

$$\angle UPQ = \angle O'AC = \angle OA'C = 90^\circ - \angle A'UP_1 = 90^\circ - \angle PUO$$

što je upravo ono što implicira da je $A'O$ okomito na PQ .