

Lakša simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

22. listopada 2020.

1. Odredi sumu:

$$\left\lfloor \frac{2^0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^1}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2^{2020}}{3} \right\rfloor$$

gdje $\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj manji od x .

2. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $0 \leq a, b, c \leq 1$. Dokaži nejednakost:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1.$$

3. Odredi najmanji prirodan broj $n \geq 4$ takav da za svaki skup S koji sadrži točno n cijelih brojeva postoje 4 (različita) broja a, b, c i d iz S za koje je $a + b - c - d$ djeljiv s 20.
4. Dan je paralelogram $ABCD$ i u njemu točka X tako da vrijedi $|\angle AXB| + |\angle CXD| = 180^\circ$. Odredi vrijednost izraza:

$$|\angle XAB| + |\angle XDC| + |\angle CXB|.$$

5. 23 prijatelja igra nogomet. Prvo izaberu suca koji će momčadi podijeliti u 2 tima od 11 ljudi. Znamo da je težina svakog od njih prirodan broj i da je, bez obzira tko je sudac, uvijek moguće napraviti 2 ekipe jednake ukupne težine. Dokaži da su svi prijatelji iste težine.