

Teža simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

22. listopada 2020.

1. Postoje li 3 prirodna broja veća od 2^{2020} sa svojstvom da kada umnošku bilo koja 2 ta broja dodamo 1 dobijemo potpuni kvadrat?
2. Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima stupnja 2020. Ako $P(x^2 - 1)$ ima 3400 realnih nultočaka, a $P(1 - x^2)$ ima 2700 realnih nultočaka, dokaži da onda postoje dvije realne nultočke od $P(x)$ takve da im je razlika manja od 0.002.
3. Odredi sve proste brojeve p i q za koje vrijedi da je

$$\frac{2^{p^2-q^2} - 1}{pq}$$

umnožak točno 2 prosta broja.

4. Tetive $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$ kružnice w sijeku se u A . Pravac kroz D paralelan sa $\overline{BC}$ siječe w ponovno u F , a $\overline{FA}$ siječe w ponovno u T . Neka je M presjek $\overline{ET}$ i $\overline{BC}$, te neka je N preslika A preko M . Pokaži da se polovište dužine $\overline{BC}$ nalazi na kružnici opisanoj $\triangle DEN$.
5. Neka je n prirodan broj veći od 3. Na kružnici je $2n - 1$ jednako udaljenih točaka od kojih je točno k obojano crveno. Takvo bojanje zovemo *dobrim* ako postoji barem jedan par crvenih točaka takvih da se unutar jednog luka koji taj par tvori nalazi točno n točaka. Odredi najmanji mogući k za koji je svako bojanje točaka na kružnici *dobro*.