

Teža simulacija državnog natjecanja 2020.

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

22. listopada 2020.

1. Postoje li 3 prirodna broja veća od 2^{2020} sa svojstvom da kada umnošku bilo koja 2 ta broja dodamo 1 dobijemo potpuni kvadrat?
2. Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima stupnja 2020. Ako $P(x^2 - 1)$ ima 3400 realnih nultočaka, a $P(1 - x^2)$ ima 2700 realnih nultočaka, dokaži da onda postoje dvije realne nultočke od $P(x)$ takve da im je razlika manja od 0.002.
3. Odredi sve proste brojeve p i q za koje vrijedi da je

$$\frac{2^{p^2-q^2} - 1}{pq}$$

umnožak točno 2 prosta broja.

4. Tetive $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$ kružnice w sijeku se u A . Pravac kroz D paralelan sa $\overline{BC}$ siječe w ponovno u F , a $\overline{FA}$ siječe w ponovno u T . Neka je M presjek $\overline{ET}$ i $\overline{BC}$, te neka je N preslika A preko M . Pokaži da se polovište dužine $\overline{BC}$ nalazi na kružnici opisanoj $\triangle DEN$.
5. Neka je n prirodan broj veći od 3. Na kružnici je $2n - 1$ jednako udaljenih točaka od kojih je točno k obojano crveno. Takvo bojanje zovemo *dobrim* ako postoji barem jedan par crvenih točaka takvih da se unutar jednog luka koji taj par tvori nalazi točno n točaka. Odredi najmanji mogući k za koji je svako bojanje točaka na kružnici *dobro*.

1. Tvrdimo da je odgovor da.

Promotrimo bilo koja 2 prirodna broja oblika $a + 1$ i $a - 1$. Pokušajmo pronaći broj k takav da su $(a + 1)k + 1 = ak + k + 1$ i $(a - 1)k + 1 = ak - k + 1$ potpuni kvadrati. Ako to uspijemo tražena trojka brojeva bit će $(a - 1, a + 1, k)$, budući da je $(a - 1)(a + 1) + 1 = a^2$ već potpun kvadrat.

Namjestit ćemo da k bude srednji član u raspisu nekog kvadrata zbroja $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$, odnosno kvadrata razlike $(m-1)^2 = m^2 - 2m + 1$. Uzmimo da je k oblika $k = 2b$ gdje je $b \in \mathbb{N}$.

Sada nam izrazi glase $2ab + 2b + 1$ i $2ab - 2b + 1$. Želimo da broj $2ab$ bude kvadrat pa stavimo $b = 2c$. Dakle, imamo $4ac + 4c + 1$ i $4ac - 4c + 1$.

Ako još uvrstimo $c = a$ dobit ćemo 2 potpuna kvadrata $(2a + 1)^2$ i $(2a - 1)^2$. Dakle, sve trojke oblika $a - 1, a + 1, 4a$ zadovoljavaju uvjet. Odaberemo li, primjerice, $a = 2^{2021}$, tri broja $2^{2021} - 1, 2^{2021} + 1, 2^{2023}$ su svi veći od 2^{2020} i zadovoljavaju uvjet, čime smo dokazali da takvi brojevi postoje.

2. Polinom ima 2020 nultočaka pa ga možemo zapisati u obliku

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{2020}),$$

gdje su $a_1, \dots, a_{2020}$ njegove nultočke.

Vrijedi

$$P(x^2 - 1) = (x^2 - 1 - a_1)(x^2 - 1 - a_2) \cdots (x^2 - 1 - a_{2020}),$$

svaka zagrada u ovom polinomu je polinom koji ima ili 2 realne ili 2 kompleksne nultočke.

Budući da $P(x^2 - 1)$ ima 3400 realnih nultočaka, za 1700 brojeva a_i vrijedi $1 + a_i \geq 0$, odnosno $a_i \geq -1$.

Analogno,

$$P(1 - x^2) = (1 - x^2 - a_1)(1 - x^2 - a_2) \cdots (1 - x^2 - a_{2020}),$$

pa za barem 1350 brojeva a_i vrijedi $a_i \leq 1$.

Kako $P(x)$ ima najviše 2020 realnih nultočaka, postoji najviše 2020 realnih brojeva $a_i, i \in \{1, 2, \dots, 2020\}$, od kojih za barem 1700 vrijedi

$a_i \geq -1$ te za barem 1350 vrijedi $a_i \leq 1$. Tada se lako dokaže da među tim brojevima postoji najmanje 1030 brojeva za koje vrijedi $-1 \leq a_i \leq 1$.

Interval $[-1, 1]$ možemo podijeliti u 1000 jednakih podintervala, razlika bilo koja 2 elementa u nekom podintervalima je $\leq 2/1000 = 0.002$, a po Dirichletovom principu znamo da barem 2 nultočke leže u istom podintervalu.

- 3.** Kako bi zadani izraz bio prirodan broj, broj $2^{p^2-q^2} - 1$ mora biti prirodan pa je i $p > q$.

Budući da je tada $2^{p^2-q^2} - 1$ neparan, p i q moraju biti različiti od 2.

Sada, budući da su p i q različiti i neparni, vrijedi $p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{8}$. Isto tako, ako je $q > 3$, vrijedi $p^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{3}$, pa sada možemo pisati

$$2^{p^2-q^2} - 1 = 2^{24k} - 1$$

Broj $2^{24k} - 1$ djeljiv je sa $2^{24} - 1$, što je djeljivo sa 3, 5, 7 i 13 pa očito vrijedi $q = 3$.

Sada želimo da

$$\frac{2^{p^2-9} - 1}{3p}$$

bude umnožak točno 2 prosta broja.

Budući da je $p^2 - 9 \equiv 0 \pmod{8}$, zapišemo početni izraz kao:

$$\frac{2^{p^2-9} - 1}{3p} = \frac{2^{8k} - 1}{3p} = \frac{(2^k - 1)(2^k + 1)(2^{2k} + 1)(2^{4k} + 1)}{3p}$$

Lagano je provjeriti da je $k \geq 2$. Ako je k paran, onda $3|(2^k - 1)$ i ako je $k > 2$, onda je $2^k - 1 = 3n$ za neki prirodan broj $n > 1$, ali onda je

$$\frac{n(2^k + 1)(2^{2k} + 1)(2^{4k} + 1)}{p}$$

umnožak barem 3 prosta broja što je u kontradikciji s pretpostavkom.

Za $k = 2$ dobivamo $p = 5$, što zadovoljava uvjet zadatka.

Ako je k neparan, vrijedi $3|(2^k + 1)$ pa je $2^k + 1 = 3n$ za neki prirodan broj $n > 1$, no onda je

$$\frac{n(2^k - 1)(2^{2k} + 1)(2^{4k} + 1)}{p}$$

ponovno umnožak barem 3 prosta broja.

Dakle, jedino rješenje je $(p, q) = (5, 3)$.

4. Neka je K polovište $\overline{BC}$ i A_1 refleksija A preko K .

Uočimo kako je F refleksija D preko simetrale BC iz čega slijedi da je DFA_1A jednakokračan trapez. Odavde:

$$|\angle MED| = |\angle TED| = |\angle TFD| = |\angle AFD| = |\angle AA_1D| = |\angle MA_1D|$$

Iz čega zaključujemo da je MDA_1E tetivan.

Sada po potenciji točke imamo

$$|AD| \cdot |AE| = |AM| \cdot |AA_1| = 2|AM| \cdot |AK| = |AN| \cdot |AK|.$$

Stoga je $DKEN$ tetivan, što je trebalo dokazati.

5. Umjesto dobrih gledat ćemo loša bojanja koja definiramo kao sva bojanja koja nisu dobra.

Neka je j maksimalan broj točaka koje loše bojanje može imati. Dakle $k = j + 1$ tj. tražimo j .

Označit ćemo vrhove sa $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$. Spojimo svaki par A_i i A_{i+n+1} promatrajući indekse modulo $2n - 1$. Bojanje je loše ako i samo ako su 2 crvena vrha spojena tetivom. Ako se krenemo tetivama "kretati" u jednom smjeru iz vrha u vrh te se u nekom trenutku vratimo na isti vrh to zovemo ciklusom. Tih ciklusa u ovom slučaju ima $M(n + 1, 2n - 1)$, gdje $M(a, b)$ predstavlja najveći zajednički djelitelj brojeva a i b .

Primjenom Euklidovog algoritma dobivamo da je

$$M(n+1, 2n-1) = M(n+1, 2n-1-2(n+1)) = M(n+1, -3) = M(n+1, 3)$$

Dakle ako je $n + 1$ djeljivo s 3, onda je 3 ciklusa, inače je samo 1. Ako je samo 1 ciklus očito je $k = n$.

Ako je pak 3 ciklusa koji svaki sadrži $\frac{2n-1}{3}$ vrha, svaki ciklus može imati maksimalno $\left\lfloor \frac{2n-1}{6} \right\rfloor$ crvenih točaka u lošem bojanju.

Dakle, u ovom slučaju $k = 3 \left\lfloor \frac{2n-1}{6} \right\rfloor + 1$